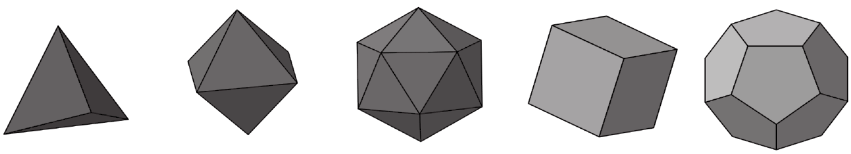
Polyèdres convexes à faces régulières isométriques (PCFRI)

Michel Demal, Jacques Dubucq & Danielle Popeler(*)

Premier exposé sur les PCFRI en 1979 au congrès de la SBPMef
1976 : découverte d'un article sur « les deltaèdres convexes » – Wisconsing 1969 – Anatole Beck - Michaël Bleicher - Donald Crowe.
Remarque : Grâce aux POLYDRONS, notre vision sur les PCFRI a évolué depuis.

Polyèdres Platoniciens

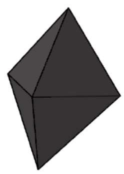
Pour nombre de personnes, les PCFRI se réduisent aux cinq polyèdres platoniciens.



Le tétraèdre | **L'octaèdre** | **L'icosaèdre** | **Le cube** | **Le dodécaèdre**

Dans les Éléments d'Euclide :
« *Il n'existe que cinq figures dont les faces sont des figures équiangles et équilatères* ».

Cette affirmation semble avoir été acceptée et non contestée pendant plus ou moins 23 siècles !



En 1930, Deijksterhuis[1] cite le bitétraèdre pour réfuter la thèse d'Euclide.
S'agit-il d'une erreur d'Euclide ?
Plusieurs auteurs pensent que non mais qu'il existe plusieurs hypothèses sous-jacentes non écrites :

- même répartition des figures en chaque sommet ;
- les polyèdres sont convexes.

Remarque :
Même répartition en chaque sommet est différent de *même nombre de polygones réguliers isométriques en chaque sommet* (voir modèles de l'exposé).

(*) U.R.E.M. (U.L.B.) – H.E.C.F.H .- U.V.G.T. Communauté française de Belgique
Michel Demal. 34 avenue Saint Pierre B7000 MONS, michel.demal@belgacom.net
Danielle Popeler. 6/1 place des Droits de l'Homme B7130 Binche d.popeler@skynet.be
Site WEB : www.uvgt.net

(1) Renseignements obtenus par F. Buekenhout.

Les PCFRI

En 1947, Freudenthal et Van Der Waerden « résolvent » le problème des PCFRI.

« résolvent » entre guillemets car il semble qu'il faille, pour eux aussi, ajouter une hypothèse supplémentaire (voir la suite de l'exposé).

Combien de PCFRI existe-t-il et avec quels types de polygones réguliers peut-on les construire ?

Polyèdres convexes et conditions nécessaires (non suffisantes) : « *En chaque sommet d'un polyèdre convexe, la somme des angles faces arrivant en ce sommet doit être inférieure à 360°.* »

$$\sum_{1}^{p} \widehat{\alpha_i} < 360° \text{ où } p \in \mathbf{N} \text{ et } p \geq 3.$$

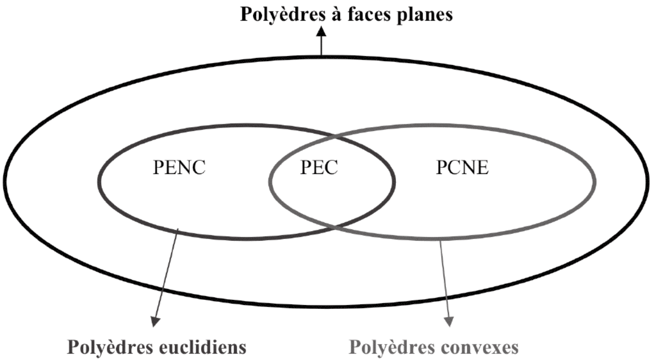
Grâce aux plaquettes POLYDRON, on montre aisément qu'il existe des polyèdres convexes dont la somme des angles-faces arrivant en un sommet vaut 360°, sans pour autant que toutes les faces arrivant en ce sommet soient coplanaires (voir modèles de l'exposé).
Néanmoins, si la somme des angles-faces arrivant en un sommet vaut 360°, alors il existe au moins deux faces co-planaires arrivant en ce sommet.
Dès lors, pour nous, la convexité des polyèdres devrait entraîner la condition nécessaire (non suffisante) : « *En chaque sommet d'un polyèdre convexe, la somme des angles faces arrivant en ce sommet doit être inférieure ou égale à 360°.* »

$$\sum_{1}^{p} \widehat{\alpha_i} \leq 360° \text{ où } p \in \mathbf{N} \text{ et } p \geq 3.$$

La recherche des PCFRI sur base de la condition nécessaire (non suffisante)

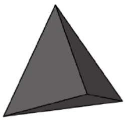
$$\sum_{1}^{p} \widehat{\alpha_i} \leq 360° \text{ où } p \in \mathbf{N} \text{ et } p \geq 3.$$

fait apparaître une infinité de PCFRI (voir les modèles de l'exposé).
Il faut introduire la condition « *deux faces contiguës ne sont pas coplanaires* », pour obtenir le nombre fini de PCFRI « découvert » par Freudenthal et Van Der Waerden.
Remarques :
Les polyèdres convexes dont deux faces contiguës ne sont pas coplanaires, nous les appelons : les polyèdres euclidiens convexes.
Les polyèdres de Pétrie sont à faces non planes.

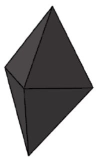


Les Polyèdres Euclidiens Convexes à Faces Régulières Isométriques

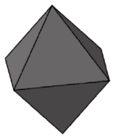
Les deltaèdres euclidiens convexes



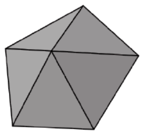
Le tétraèdre



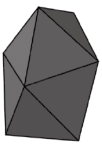
Le diamant triangulaire



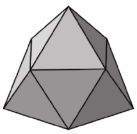
L'octaèdre



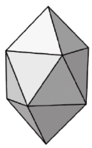
Le diamant pentagonal



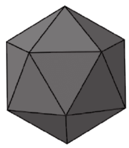
Le snub disphénoïde



Le prisme triangulaire triaugmenté

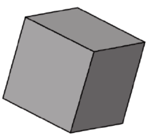


La pyramide carrée gyroallongée



L'icosaèdre

Le cube



Le dodécaèdre régulier