

Le nombre et la numération aux cycles 1 et 2

Claudine Chevalier(*)

Introduction

Je m'étais proposée d'aborder avec les participants, lors de cet atelier, les problèmes posés par l'enseignement des nombres entiers et de la numération décimale à l'école primaire.

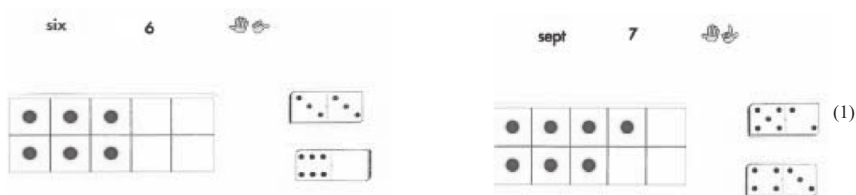
Il s'agissait de présenter une situation permettant l'introduction de la numération décimale (d'après une idée d'Odette Bassis, « les moutons »), puis d'examiner une proposition de progression possible de la PS au CE2 concernant cet apprentissage ainsi que les différents matériels qui semblent les plus pertinents.

Un constat récurrent

Dans les évaluations nationales CE2, il est très fréquent de rencontrer des erreurs que l'on peut attribuer à une non compréhension par les élèves du système de numération décimale. Lors des stages de formation continue, les enseignants nous confient leurs difficultés à enseigner ces notions et leur perplexité devant les erreurs répétées de leurs élèves.

Il est alors intéressant de regarder les premières représentations des nombres rencontrées par les élèves en CP.

Des représentations des nombres entiers en CP



Et pourtant, six c'est aussi « trois et trois », attention il vous faut de l'imagination car il ne s'agit pas ici de le « dire à l'oral » mais de faire les gestes avec les deux mains : trois doigts levés main gauche et trois doigts levés main droite.

Mais six, c'est aussi « deux fois trois ». Cette fois-ci, présentez deux fois de suite votre main avec trois doigts levés. Et l'on peut aussi « voir » trois fois deux : présentez trois fois de suite votre main avec deux doigts levés

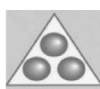
Et pour sept ? On peut faire quatre et trois avec les deux mains et les doigts levés, mais pas deux ou trois fois une présentation des mêmes doigts levés.

(*) Professeur de mathématique à l'IUFM de Créteil.

(1) Représentations extraites de Mille Maths CP, Éd. Nathan et CAP Maths CP, Éd. Hatier.

Ainsi apparaît dans ces différentes représentations et ces différents gestes, non seulement l'aspect cardinal des nombres 6 et 7 (éléments de \mathbf{N}), mais aussi les structures additives (\mathbf{N} , +) et multiplicatives (\mathbf{N} , \times) de ces nombres.

On pourrait aussi s'intéresser à d'autres représentations :



(2)

Ces mêmes nombres sont rencontrés par les élèves dans d'autres configurations :



0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

(3)

Dans cette représentation des nombres en « file numérique », c'est ici l'aspect ordinal des nombres qui intervient (\mathbf{N} , <). Dans le tableau cartésien, l'aspect « d'écriture organisée » apparaît.

Un autre aspect intervient également à ce même moment de l'apprentissage : la relation entre le nombre « dit », « écrit » et « vu » (en représentation mentale ou réelle) (cf. « Entendre, dire, écrire, voir ... un nombre », p. 4).

Des éléments de réponse

À partir de ces constats, j'ai abordé en formation initiale et dans les différents stages de formation continue deux catégories de questions :

- 1/ Quelles activités, quels matériels favorisent l'apprentissage par les élèves de ces différents aspects du nombre entier, quelle progression peut-on adopter de la PS au CP dans ce domaine ?
- 2/ Quand et comment peut-on aborder la notion de « système » de numération décimale de position ?

(2) La bande des nombres de 1 à 32, ACL-les éditions du Kangourou (www.mathkang.org).

(3) In Cap Maths CP, Éd. Hatier

La synthèse des réflexions en réponse à la première question est présentée dans les tableaux « Vers la connaissance du nombre aux cycles 1 et 2 » (cf. p. 5 et 6).

En réponse à la deuxième question, j'ai proposé une situation expérimentée, dans de nombreuses classes dont les enseignants sont des adhérents du GFEN⁽⁴⁾, et par moi-même en formation initiale et continue, sur une idée d'Odette Bassis, « Les moutons »⁽⁵⁾ (cf. p. 7). Cette situation permet aux élèves de construire la notion de « système » et aux enseignants, de par la situation « inconfortable » dans laquelle ils se trouvent, de comprendre la multiplicité des difficultés à laquelle sont confrontés les élèves et les différentes facettes des notions de « code » et de « système ».

À propos de « matériel médiateur »

Nous avons ensuite « exploré » différents matériels et examiné leur adéquation aux objectifs d'apprentissage poursuivis : les différents aspects du nombre (cardinal, ordinal, « système », « structure additive et multiplicative ») et sa désignation (orale ou écrite) (cf. p. 5 et 6). En ce qui concerne les matériels favorisant la compréhension du système décimal, nous avons regardé le degré d'abstraction qu'imposait l'utilisation de ces différents matériels (cf. p. 8).

Éléments de bibliographie :

Odette Bassis, *Concepts clés et situations-problèmes*, Éd. Hachette Éducation, 2003.

Michelle Bacquet et Bernadette Gueritte-Hess, *Le nombre et la numération, pratique de rééducation*, Éd. du Papyrus, 1996.

Rémi Brissiaud, *Comment les enfants apprennent à calculer*, Éd. Retz, 2003.

J. Bideaud et H. Lehalle (sous la direction de), *Le développement des activités numériques chez l'enfant*, Éd. Lavoisier, 2002.

Dominique Valentin, *Découvrir le monde avec les mathématiques*, Éd. Hatier, 2005.

Joël Briand, Martine Loubet, Marie-Hélène Salin, *Apprentissages mathématiques pour la maternelle*, Hatier (CDrom), 2004.

Sites internet :

- TFM : www.uvp5.univ-paris5.fr/TFM/
- Maternelles : www.maternelles.net
- Montessori : www.montessorienfrance.com

(4) Groupe français d'Éducation Nouvelle : www.gfem.asso.fr

(5) In O. Bassis, *Concepts Clés et situations problèmes*, Éd. Hachette Éducation, 2003.

Entendre, dire, écrire, voir ... un nombre.

Si je dis	Un	Deux	Trois	Quatre	Cinq	Six	Sept	Huit	Neuf	Dix
J'écris	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Je vois	•	••	•••	••••	•••••	••••••	•••••••	••••••••	•••••••••	••••••••••

Si je dis	Onze	Douze	Treize	Quatorze	Quinze	Seize
J'écris	11	12	13	14	15	16
Je vois	•••••••	••••••••	•••••••••	••••••••••	•••••••••••	••••••••••••

Mais :

Si je dis	dix-sept	dix-huit	dix-neuf
J'entends	Dix puis sept	Dix puis huit	Dix puis neuf
Or j'écris	17	18	19
Je vois	••••••• ••••	•••••••• ••••	••••••••• ••••

	Le nombre sous son aspect				Désignation			domaine
	cardinal	ordinal	« système »	« opératoire »	orale	écrite		
						chiffres	mots	
CP	→ 69 ou 100	→ 100	→ 100	Structure additive, multiplicative → 100	Particularités de 11 à 16	→ 99	Au fur et à mesure	domaine
	Evaluation	Bande numérique, rouleau numérique	Jetons, sacs, allumettes, enveloppes, Tableau de nombres	Oral, ardoise, Compléments à 10, doubles, compter de 2 en 2....	Verbalisation systématique	Cartons Montessori, Tableau de nombres	vocabulaire	matériel « médiateur »
CE1	→ 1000		→ 1000	Structure additive, multiplicative → 1000	particularités de 70 à 99	→ 1000	Au fur et à mesure	domaine
	Evaluation		Groupements/ échanges, compteurs	Oral, ardoise, Compléments à 100, doubles, compter de 2 en 2, 5 en 5...	Verbalisation systématique	Cartons Montessori	vocabulaire	matériel « médiateur »
CE2	Evaluation des acquis	Evaluation des acquis	→ ...∞	Structure additive, multiplicative → 1000	Evaluation des acquis	Evaluation des acquis	Evaluation des acquis	domaine
			passage d'un rang à l'autre : « fois dix »	Oral, ardoise, Relations numériques				matériel « médiateur »

		Le nombre sous son aspect				Désignation			
cardinal	ordinal	« système »	« opératoire »	orale	écrite		mois		
					chiffres				
CP									
→ 69 ou 100	→ 100	→ 100	Structure additive, multiplicative → 100	Particularités de 11 à 16	→ 99		Au fur et à mesure	domaine	matériel « médiateur »
Evaluation	Bande numérique, rouleau numérique	Jetons, sacs, allumettes, enveloppes, Tableau de nombres	Oral, ardoise, Compléments à 10, doubles, compter de 2 en 2 ...	Verbalisation systématique	Cartons Montessori, Tableau de nombres		vocabulaire		
CE1									
→ 1000		→ 1000	Structure additive, multiplicative → 1000	particularités de 70 à 99	→ 1000		Au fur et à mesure	domaine	matériel « médiateur »
Evaluation		Grouperments/ échanges, compteurs	Oral, ardoise, Compléments à 100, doubles, compter de 2 en 2, 5 en 5...	Verbalisation systématique	Cartons Montessori		vocabulaire		
CE2									
Evaluation des acquis	Evaluation des acquis	→ ...∞	Structure additive, multiplicative → 1000	Evaluation des acquis	Evaluation des acquis		Evaluation des acquis	domaine	matériel « médiateur »
		passage d'un rang à l'autre : « fois dix »	Oral, ardoise, Relations numériques						

Concepts-clés et
situations-problème
Haute-Education.

Odette Bassis
Mathématiques
G.F.E.N.

1

LA NUMÉRATION

Matériel :

- des bûchettes, ou encore... des allumettes (4 à 5 boîtes de ménage)
- des petits élastiques (200 à 250)
- des couvercles de boîte à chausures (1 par enfant).

Matériau de recherche : non pas les objets mais l'ACTION MÈNEE (par les enfants) SUR LES OBJETS.

Objectif : Construction PAR les enfants du principe de numération, directement avec des nombres de trois chiffres, en base quatre.

1^{re} Étape : FAIRE

Où il devient nécessaire de faire des groupements.

Situations de départ :

Un tas de bûchettes est donné à chaque enfant (à 30... en système décimal) avec pour consigne : « Vous avez devant vous un troupeau de moutons. Vous voulez les vendre. Vous voulez savoir combien il y en a. Mais voilà : vous habitez dans un pays où on ne sait compter que jusqu'à quatre. Alors ? Que faire ? »

Et donc... compter des moutons revient à faire des tas, et même des tas de tas... Le maître organise la confrontation de ce qui est fait par les enfants.

2^e Étape : DIRE

Où l'on cherche à dire ce qu'on a fait.

Consigne : « Cherchez une phrase qui explique ce que vous avez fait. Ce qu'il y a dans votre champ. Pour écrire au monsieur qui veut acheter vos moutons. »

Organisation par le maître du va-et-vient entre l'action sur les bûchettes et la verbalisation de cette action.

Confrontation entre :

- ce qui est dit et ce qui est fait par chaque enfant.
- ce qui est dit par les différents enfants.

3^e Étape : FORMULER

1. Travail sur la formulation des différents types de groupements.
Quels mots pour désigner quoi ? Objectif : *approche des différents ordres d'un tas.*

Moyen : Confrontation systématique, jusqu'à terme, des « faire » et des « dire ».

2. Où il devient nécessaire de se donner une *dénomination à la fois commune et correcte des différents unités* (exemple : « gros paquet, petit paquet, mouton seul »).

Au terme de cette étape la conceptualisation des unités d'ordre différent est construite.

4^e Étape : CODIFIER

Travail sur l'écriture globale d'un nombre, c'est-à-dire sa codification.

Consigne : « Voilà un tas qui arrive aux gens malades dans ce pays : les habitants ne savent plus écrire de mots. Que va-t-on faire pour le message ? »

Invention par les enfants de dessins-codages.

Confrontation et réflexion sur ces codages.

Choix et établissement d'un codage commun à la classe (Exemple : 3 Δ 2 □ 1 □)

5^e Étape : ÉCRIRE UN NOMBRE SEULEMENT AVEC DES CHIFFRES

Consigne : « Une nouvelle maladie arrive dans ce pays. Les gens ne savent même plus dessiner : ils ne savent écrire que des chiffres. »

Confrontation et réflexion sur les « idées » des enfants : couleurs, grands et petits tas, positions différentes des chiffres suivant l'unité qu'ils représentent.

Mise au point de l'écriture positionnelle.

6^e Étape : LE ZÉRO

Introduction du « zéro » comme nécessité fonctionnelle par rapport à l'écriture positionnelle.

Moyen : Jeu d'envoi de messages entre équipes :

- à l'envoi d'un tas de 102 bûchettes (en base quatre)
- aux autres, on donne un tas de 120 bûchettes.

Chaque équipe est chargée à l'équipe adverse (c'est-à-dire de coder sous forme

de nombre son tas de bûchettes).

— de déchiffrer le message reçu.

7^e Étape : LA SUITE DES NOMBRES Fixation de l'écriture positionnelle.

Moyen : Écriture par chaque enfant de la liste successive des nombres (on ajoute une bûchette à chaque fois), d'où nombres à un, deux, trois, voire quatre chiffres.

Rémémorisation dans différentes bases et notamment en base dix.

8^e Étape : VOCABULAIRE SPÉCIFIQUE DE LA BASE DIX

Le Nombre et la Numération " Pratique de redécouverte. H. Bocquet B. Guichet-Hess I. Socol Ed. Papirus

2.3.3 Etude des matériels

Nous avons à plusieurs reprises parlé du matériel servant à l'apprentissage de la numération : allumettes, cubes, matériel multibase...

Nous avons expliqué pourquoi nous utilisons un de ces matériels.

A travers l'analyse de l'équivalence nous avons décrit des « 10 unités » se transformant de diverses manières équivalentes numériquement, mais prenant des aspects et des configurations de plus en plus abstraits.

Nous voudrions situer brièvement les matériels connus et utilisés pour l'apprentissage et donner les grandes caractéristiques des cinq catégories dans lesquelles nous les rangons.

1 - Les « uns » qui demeurent

C'est le matériel que nous utilisons : les allumettes, mais aussi vient le même principe en quantité suffisante pourvu qu'il existe une équivalence similitude entre eux.

Dans la dizaine que l'on constitue par regroupement chacune des unités reste présente. Seuls un lien (élastique) ou un contenant (sacets) change l'appellation, et l'on peut toujours, à la seconde, reprendre la première appellation, par exemple en ôtant l'élastique, pour retrouver la première appellation.

2 - Les « uns » qui s'échangent, mais restent visibles

L'abstraction la plus commune est le matériel multibase. Lorsqu'il y a autant d'éléments que la base, le régime, alors on échange les dix cubes appelés « uns » contre 1 dix appelé « 1 barre ».

Comparativement au premier cas, on effectue une opération supplémentaire : l'échange qui fait disparaître le « un » initial dans un tout, la barre. Même si celui-ci est gradué par des encoches, le « un » n'est plus visible. On parle alors d'opération d'échange inverse, par mise en parallèle du 1 dix avec 10 uns.

Ces matériels offrent un intérêt dans les classes de sounds parce qu'ils ont l'avantage de se nommer : cube, barre, plaque, gros cube. De plus ils sont aisément identifiables et sont très faciles à manipuler.

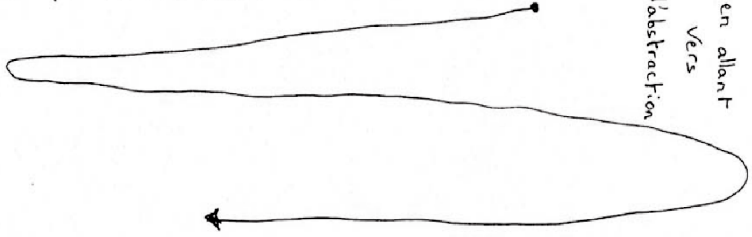
Dans le matériel, Catherine s'ajoutent, outre le principe de l'échange basé sur la longueur, des notions de couleur qui personnalisent chaque nombre.

3 - Les « uns » qui disparaissent mais laissent une trace symbolique

C'est le principe même de l'argent.

Les dix pièces de 1 F n'apparaissent plus dans le billet de 10 F, mais le 10 est inscrit.

C'est donc un pas vers l'abstraction.



4 - Les « uns » qui disparaissent se transforment en un autre « un » en changeant de couleur

C'est un pas supplémentaire vers l'abstraction.

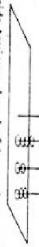
Le matériel Montessori, repis par le père Faure, qui le qualifie de semi-concret, en est un bon exemple :

- concret, il l'est encore parce qu'il y a échange réel de dix cubes bleus pour un rouge ;
- semi-concret, parce que c'est un code : s'il n'y a pas passage à l'écriture, la vue d'un ensemble de cubes de couleurs différentes ne porte pas visiblement en elle-même la règle du jeu.

5 - Les « uns » qui perdent toutent la position

Il s'agit des abaques et des bouliers.

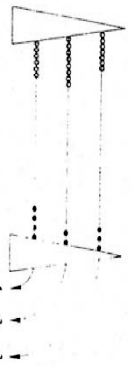
Pour les abaques le classement est ordonné comme pour l'écriture droite-gauche, puisque les tiges sont verticales. 10 perles sur la tige de droite doivent être échangées contre 1 sur la tige immédiatement placée à gauche. Le transfert est assez direct (Fig. 1).



Le danger réside toujours dans le fait que les « uns » ayant disparu, les enfants faissent fonctionner le système sans savoir ce qu'il recouvre.

Le boulier français ajoute à ce problème celui du passage d'une lecture droite-gauche à une écriture droite-gauche, en effet :

- la première ligne représente les dizaines ;
- la seconde ligne représente les unités ;
- la troisième ligne représente les centaines (Fig. 2).



Les boules sont poussées de la gauche vers la droite. Celles-ci, isolées, sont dénombrables, et il faut opérer le transfert d'écriture vers l'horizontale, comme sur la figure.

Si au cours d'une opération on ajoute la suite des boules jusqu'à l'extrémité, l'échange de toute la ligne pour une seule de la ligne inférieure représente la retenue.