Ce qui est vraiment évalué par PISA en mathématiques. Ce qui ne l'est pas. Un point de vue français.(*)

Antoine Bodin(**)

Résumé

Cet article laisse de côté de nombreux points importants des études PISA pour se centrer sur l'examen de la validité externe des questions du domaine mathématique.
Tout d'abord, il cherche à situer les contenus mathématiques des questions par rapport au curriculum français, et essaie de quantifier le recouvrement par PISA de ce curriculum.
Ensuite il tente de comparer la complexité cognitive des questions mathématiques de PISA avec celle des questions d'examens et d'évaluations courantes en France.
Pointant des différences entre les conceptions liées aux études PISA et les attendus du curriculum mathématique et de la culture scolaire de notre pays, il soulève des questions relatives à la validité épistémologique et didactique de l'étude.

1. Introduction

Les études PISA sont organisées par l'OCDE, qui, on le sait, est une organisation qui s'intéresse principalement aux questions de développement économique dans un contexte de mondialisation. La raison essentielle qui a conduit l'OCDE à mettre en place ces études est la conviction affirmée qu'une bonne instruction est la clef pour un développement harmonieux des divers pays.
Nous n'allons pas, dans ce papier, étudier la valeur de cette conception, ni ses implications économiques et politiques.
De même, nous accepterons l'idée que le cadre de référence mathématique de PISA est cohérent avec le projet général de PISA et que le développement des instruments d'évaluation des acquis mathématiques a été fait aussi fidèlement et aussi précisément que possible (et personnellement je pense qu'il en est ainsi). Cela pour dire que cet article laissera totalement de côté la question de la validité interne de l'étude.
De très nombreux documents ont été écrits et diffusés dans le monde à propos des études PISA ; une partie d'entre eux produits et publiés directement par l'OCDE ou

(*) Ce texte reprend et complète une communication faite dans le cadre d'une conférence organisée par les Sociétés mathématiques françaises et finlandaise « L'enseignement des mathématiques à partir de l'enquête PISA (Joint Finnish-French Conference Teaching mathematics : beyond the PISA survey) », qui s'est tenue à Paris du 6 au 8 octobre 2005.
Certain points, familiers pour les lecteurs du bulletin vert, sont précisés pour une audience plus large, tant française qu'étrangère.
(**) IREM de Franche-Comté. Responsable de l'Observatoire EVAPM.

par le consortium chargé de la mise en place de PISA[(1)], beaucoup d'autres par les institutions officielles (ministères et autres), par des organismes de recherche, par les medias, etc. des pays concernés.
De ce fait, l'information disponible est riche et contrastée. Une grande partie de cette documentation est publique et l'OCDE a fait le maximum pour permettre aux chercheurs et aux personnes concernées d'avoir plein accès au cadre général de l'étude, aux cadres particuliers des différents domaines, à la base de données, ainsi qu'aux rapports internationaux.
Loin de la course au palmarès, souvent dénoncée, et qui a pris beaucoup trop d'importance, les études PISA ont produit une masse de données de qualité, susceptibles d'alimenter nombre d'études complémentaires pouvant présenter un intérêt allant du politique au didactique.
De nombreuses analyses, internationales comme nationales, ont été menées pour essayer de tirer, aussi bien à partir des données déjà traitées que des données brutes, des informations utiles pour toutes sortes de gens intéressés par les questions d'éducation.
Cependant, bien peu d'efforts semblent avoir été faits jusqu'à présent pour étudier, d'un point de vue externe, l'ensemble des questions mathématiques de PISA, pour essayer de mieux comprendre ce qu'elles évaluent réellement et jusqu'à quel point elles peuvent être considérées comme valides d'un point de vue épistémologique et didactique. Des recherches supplémentaires sont nécessaires et conditionnent l'utilité de l'étude pour l'enseignement proprement dit et pour les enseignants.
Cet article examine donc la validité externe de Pisa, limitée à son volet mathématique et ceci d'un point de vue français (français par les références faites au curriculum français, aux examens et évaluations habituels en France, …).
Insistons sur le fait que le présent article n'a pas pour objet de présenter les résultats, et encore moins de les commenter. Pour cela, le lecteur pourra se référer aux nombreux articles déjà publiés (cf. références et site de l'APMEP).

2. Ce que PISA choisit d'évaluer et comment elle l'évalue

En premier lieu, il est important de rappeler que PISA ne prétend pas évaluer la qualité générale des systèmes éducatifs des pays participant aux études. En ce qui concerne les mathématiques, il ne prétend pas évaluer les compétences générales des élèves dans ce domaine, mais se limite à ce que l'OCDE juge essentiel pour la vie ordinaire de tout citoyen (ce qui est nommé officiellement « mathematical literacy » et mal traduit en français par « culture mathématique »).
Citons le rapport officiel :
« *L'enquête PISA vise à évaluer dans quelle mesure les jeunes adultes de 15 ans, c'est-à-dire des élèves en fin d'obligation scolaire, sont préparés à relever les défis de la société de la connaissance. L'évaluation est prospective, dans le sens où elle porte sur l'aptitude des jeunes à exploiter leurs savoirs et savoir-faire pour faire face aux défis de la vie réelle et qu'elle ne cherche pas à déterminer dans quelle mesure les élèves ont assimilé une matière spécifique du programme d'enseignement. Cette*

(1) ACER – Melbourne - Australie.

orientation reflète l'évolution des finalités et des objectifs des programmes scolaires : l'important est d'amener les élèves à utiliser ce qu'ils ont appris à l'école, et pas seulement à le reproduire. »[(2)]

Quoi qu'il en soit, les élèves qui ont des difficultés à répondre aux questions de PISA semblent appelés à rencontrer d'autres difficultés et les pays qui ont de mauvais résultats sont considérés comme préparant mal les jeunes à la vie qui les attend.

Ainsi, PISA n'évalue pas le savoir mathématique dans son intégralité, mais au moins une part de celui-ci.

Dans ce qui suit, nous essayerons d'identifier plus clairement la partie du domaine mathématique réellement évaluée par PISA et de comparer cette partie avec les contenus mathématiques qui, en France, ont été rencontrés et en principe étudiés par quasiment tous les jeunes de 15 ans. Les relations pouvant exister entre cette partie, que nous appellerons « Mathématiques pour tous », plutôt que « culture mathématique », et l'ensemble des connaissances et compétences supposées développées chez les jeunes de 15 ans, selon les chemins scolaires qu'ils ont suivis, est une question difficile, qui nous conduira à soulever quelques questions de nature épistémologique et didactique.

Examinons maintenant la façon dont les questions mathématiques de PISA se situent par rapport au curriculum français.

3. Comparaison des contenus mis en jeu par PISA avec les contenus des programmes français

Pour le moment, limitons-nous aux programmes que la plupart des jeunes de 15 ans ont étudiés. Il s'agit des programmes du collège. À 15 ans, certains élèves sont en Seconde, voire en Première, tandis que d'autres, en retard, sont en Troisième ou en Quatrième. Quelques-uns sont dans l'enseignement spécial, mais tout compte fait, plus de 85% des jeunes de 15 ans ont étudié ce programme[(3)].

Le lecteur trouvera en annexe 4 une mise à plat synthétique, officielle, de ce programme, avec un pointage des notions qui sont impliquées dans au moins une question mathématique de PISA.

Il s'agit d'un simple repérage en termes de contenus, fait à partir d'une analyse des tâches de l'ensemble des questions de PISA. Dans un premier décompte, qui laisse momentanément de côté la question des méthodes et démarches sollicitées, et celle

(2) OCDE (2004) : Apprendre aujourd'hui pour réussir demain – premiers résultats de PISA 2003. p. 20.

(3) En réalité l'appellation officielle 15 ans prête à confusion. Voici ce que dit le rapport technique de PISA (page 46) :

« La population des 15 ans a été légèrement adaptée au niveau international, pour mieux répondre aux conditions de l'étude de la plupart des pays de l'hémisphère Nord. Comme la passation des tests était prévue pour le mois d'avril, la population de référence a été définie comme étant composée de tous les jeunes âgés de 15 ans et 3 mois révolus à 16 ans et 2 mois révolus au moment de la passation des épreuves. » (technical report – traduction A. Bodin).

Cela explique que 59,1% des élèves français qui ont passé les tests PISA étaient en lycée au moment de la passation, en Seconde pour la plupart (générale ou professionnelle), et que quelques-uns étaient en Première.

du niveau de complexité des questions, les points de contenus sont affectés du même poids, sans tenir compte de l'importance relative des concepts et notions correspondantes. Il convient de rappeler ici qu'une partie des questions de PISA ont été réservées pour un usage ultérieur. Dans ce texte, je ne citerai que les questions « libérées », mais la plupart des autres questions ont pu être prises en compte dans l'analyse.
En fin de compte, avec cet indicateur fruste, nous trouvons que les contenus des questions de PISA couvrent environ 15% des contenus des programmes du collège, c'est-à-dire du programme qui a été étudié par plus de 85% des jeunes de 15 ans. Cela montre le caractère marginal de l'étude PISA par rapport au curriculum français (mais marginal ne veut pas dire sans importance).
Simultanément, ces 15% ne représentent, environ, que 75% des questions posées par PISA, ce qui signifie qu'environ 25% des questions de PISA ne correspondent pas à ce que les élèves étudient au collège. C'est en particulier le cas pour les questions du domaine « incertitude » et pour des questions de combinatoire.
Toutefois, aucune évaluation ne peut couvrir 100% d'un curriculum donné, aussi, pour aller plus loin, nous avons cherché à comparer avec des situations d'évaluation communes dans notre pays.

4. Comparaison des contenus mis en jeu par PISA avec d'autres situations d'évaluation

4.1. Comparaison avec une épreuve du brevet des collèges

Nous avons choisi de comparer les questions de PISA avec celles d'une épreuve classique du brevet des collèges. Il s'agit, là encore, d'un examen passé par plus de 85% des jeunes de 15 à 16 ans.
Pour cela, nous avons utilisé la même méthode d'identification des contenus concernés que celle présentée ci-dessus (§3). L'annexe 5 montre le degré de couverture par PISA de l'épreuve examinée, laquelle est représentative des épreuves de cet examen. L'épreuve elle-même est reproduite en annexe 3.
Dans ce cas, nous trouvons un taux de recouvrement de 35% des programmes de collège. Nous observons de plus que l'épreuve de brevet couvre davantage les contenus des programmes des classes de Quatrième et de Troisième, alors que les questions de PISA sont davantage limitées aux contenus des programmes de Sixième et de Cinquième.
Cependant, le brevet des collèges est une illustration bien pauvre, aussi bien des objectifs officiels des programmes du collège que des objectifs des enseignants et des pratiques pédagogiques courantes. Le brevet des collèges est bien connu pour restreindre les objectifs et n'est pas considéré comme une clé valide pour la préparation des études ultérieures.

4.2. Les études EVAPM

Par la suite, nous ferons référence aux études organisées dans le cadre de « l'Observatoire EVAPM ».
EVAPM est une recherche conduite depuis une vingtaine d'années dans le cadre de

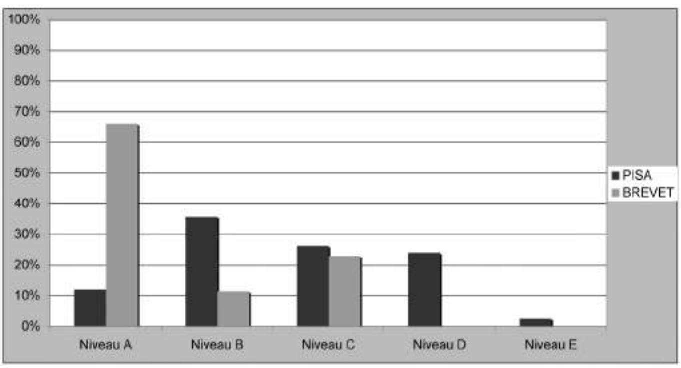
l'Association des professeurs de mathématiques (APMEP) et de l'Institut national de recherche pédagogique (INRP), pour suivre l'évolution du curriculum mathématique de l'enseignement secondaire français, avec un intérêt particulier pour les acquis des élèves (curriculum atteint).
En lien fort avec les enseignants et les impliquant dans le processus de développement des épreuves destinées aux élèves, les études EVAPM reflètent assez bien les conceptions et les objectifs des enseignants.
Lors des dernières études EVAPM, nous avons rencontré une assez forte résistance de la part des enseignants lorsque nous avons essayé d'introduire quelques questions de PISA dans les études. La plupart des questions ont été considérées comme non adaptées à nos programmes et une partie d'entre elles ont été jugées culturellement biaisées.
Il n'est pas pertinent de parler ici du taux de recouvrement des programmes par les études EVAPM, dans la mesure où ces études se veulent exhaustives (taux de recouvrement souhaité de 100%). Cependant nous allons utiliser plus loin ces études pour comparer les demandes cognitives des questions de PISA avec celles d'autres situations d'évaluation conduites en France.

4.3. Comparaison des demandes cognitives

Pour comparer les demandes cognitives des questions d'évaluation, nous utilisons une taxonomie (issue des travaux de R. Gras), dont les catégories principales sont :

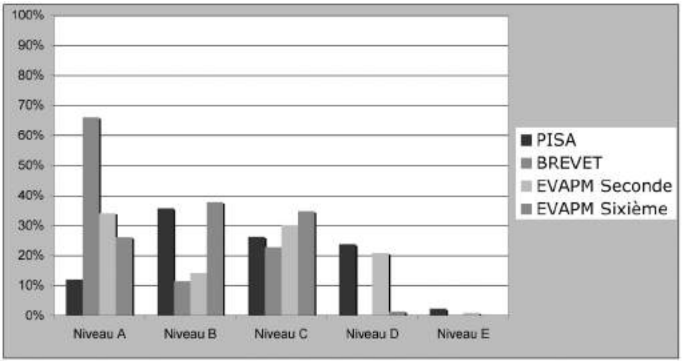
- A Connaissance et reconnaissance…
- B Compréhension…
- C Application…
- D Créativité…
- E Évaluation…

Voir en annexe 1 un premier développement de cette taxonomie.
Le diagramme suivant permet de comparer le niveau des demandes cognitives des questions de PISA avec celles de questions de l'épreuve du brevet des collèges précédemment examinée. Ici encore, le repérage se fait à partir de l'analyse des tâches présentée au §3.



La différence est frappante : les questions du brevet portent essentiellement sur le niveau A (connaissance et reconnaissance). De plus, la plupart des questions placées

au niveau C (application) pourraient être placées en A, dans la mesure où leur résolution peut être menée à bien de façon quasi automatique.
Sans aucun doute, en ce qui concerne les niveaux de complexité cognitive, la répartition des questions de PISA est mieux équilibrée que celle des questions du brevet(4).
Cependant, ainsi que nous l'avons déjà noté, le brevet ne reflète pas correctement le curriculum français. Comme précédemment, regardons du côté des études EVAPM dont nous avons dit qu'elles traduisaient mieux les attentes des enseignants.
Le diagramme suivant permet de comparer PISA avec les deux études EVAPM déjà évoquées :



On constate que l'équilibre taxonomique de ces deux études se rapproche de celui de PISA.

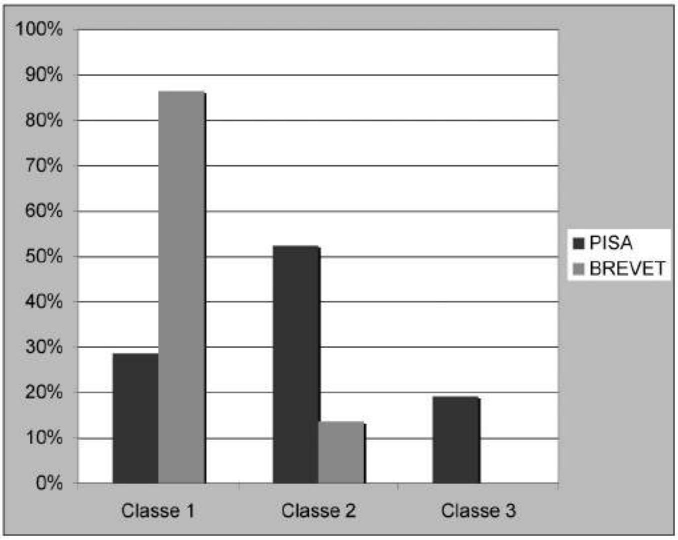
4.4. Comparaison des niveaux de compétences sollicités

PISA utilise un classement des questions selon trois niveaux de compétences :

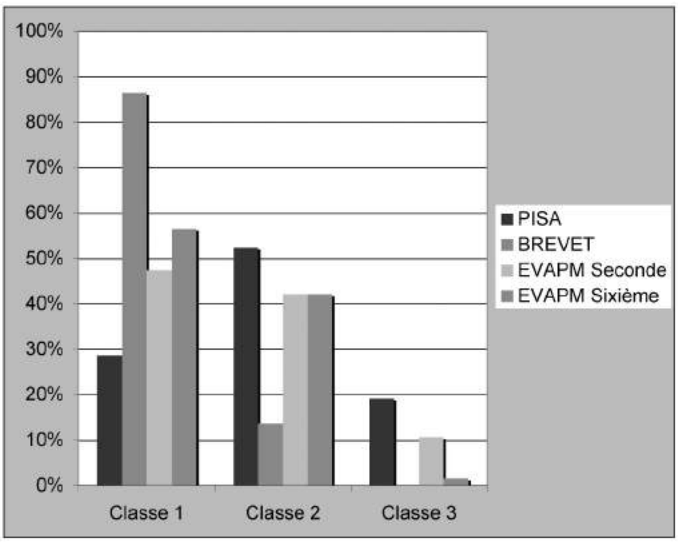
- **Classe 1 : Reproduction** : « … consiste en calculs simples et définitions du type le plus habituel dans les évaluations ».
- **Classe 2 : Connexions** : « … demande que des connexions soient faites pour résoudre des problèmes simples ».
- **Classe 3 : Réflexion** : « … demande pensée mathématiques, généralisation et initiatives …, demande que les élèves s'engagent dans l'analyse, qu'ils identifient les éléments de la situation proposée et qu'ils posent leurs propres problèmes ».

Voir l'annexe 2 pour plus de détails(5).
Le diagramme suivant permet de comparer les niveaux de compétences impliqués par les questions de PISA avec ceux qui sont impliqués par les questions du Brevet.

(4) La rénovation du brevet est à l'ordre du jour. Peut-être la réflexion menée autour de PISA pourra-t-elle être utile ?
(5) On notera que pour EVAPM nous utilisons une classification des compétences empruntée aux travaux d'Aline Robert [Robert 2002]. Bien que d'inspiration théorique différente de celle de PISA, la classification d'Aline Robert conduit le plus souvent à classer les questions aux mêmes niveaux (1, 2 ou 3). Voir références, et sur le site de l'APMEP à l'entrée « Observatoire EVAPM ».



On constate que les questions de PISA relèvent à plus de 70% des niveaux 2 et 3, alors que seules 15% des questions du brevet relèvent de ces niveaux.
Ici encore, comparons avec les études EVAPM.



Le diagramme montre à nouveau un équilibre nettement plus proche de celui de PISA.

5. Vers une analyse épistémologique

5.1. À propos des différences entre la Finlande et la France

Pour cet article, écrit dans le contexte d'un colloque franco-finlandais, nous nous sommes plus spécialement intéressés aux comparaisons entre les résultats des élèves français et des élèves finlandais.

Les résultats d'ensemble, pour les mathématiques, sur une échelle globale (511 pour la France, 548 pour la Finlande) cachent le fait que cette différence signifie simplement une différence de 0,33 écart-type sur l'échelle normale réduite (moyenne 0, écart-type 1), cela il est vrai au voisinage d'un point de distribution où la densité de probabilité est maximale(6). Peu de gens savent cela, et encore moins sont en mesure de le comprendre (dans le public, mais aussi parmi les journalistes spécialisés et chez les politiques !).

Un regard sur les domaines de l'étude (quantités, variations et relations, espaces et formes, incertitude) ne permet que de constater que ce qui est vrai pour l'échelle globale l'est aussi pour les échelles relatives à chacun de ces domaines. Pour essayer de comprendre les différences observées, il est indispensable de se tourner vers les questions elles-mêmes et sur les pourcentages de réussite à ces questions dans chacun des pays (ou encore, pour d'autres approches, pour chacun des sous-groupes étudiés(7)).

Disons d'abord que cet examen confirme totalement les meilleurs résultats obtenus par les élèves finlandais. C'est seulement l'amplitude de ces différences et leur signification qui peut être interrogée.

En ce qui concerne l'amplitude des différences, selon les items étudiés les différences des scores absolus observés s'étalent entre +30% en faveur des élèves finlandais et +25% en faveur des élèves français. La moyenne de ces différences étant de + 3,5%

(6) Dans le but de faciliter les comparaisons, tous les scores sont normalisés, c'est-à-dire ramenés à une distribution de moyenne 0 et d'écart-type 1 par transformation affine. En réalité, la transformation est assez complexe et utilise des méthodes probabilistes (type Théorie des Réponses à l'Item) dans le but, en particulier, de réduire les biais dûs aux items eux-mêmes et au fait que tous les élèves ne passent pas les mêmes questions. Pour simplifier, disons que si m et σ désignent respectivement la moyenne et l'écart-type de la distribution des scores de tous les élèves, alors, si x est le score d'un élève, son score transformé x' est obtenu, de façon classique par : $x' = \dfrac{x-m}{\sigma}$. Dans ces conditions, la moyenne de la distribution des scores transformés est 0 et son écart-type est 1. Pour les calculs suivants, on identifie la distribution des scores à une distribution normale (i.e. gaussienne) ; on pourrait s'arrêter là, mais bien des gens verraient d'un mauvais œil des scores nuls ou négatifs, que ce soit pour des individus, ou, pire, pour des pays ! Pour des raisons quasi-diplomatiques, on effectue alors une nouvelle transformation affine … qui a pour effet de ramener la moyenne des scores à 500 et l'écart-type à 100.

(7) Nous ne parlerons pas ici de la question du genre (garçons-filles), bien que notre analyse pointe quelque biais en relation avec cette question, au moins pour certains pays. En fait, les résultats de filles sont inférieurs à ceux des garçons dans tous les pays sauf deux, mais la question reste ouverte pour des études plus précises. De plus, d'autres clivages que le clivage garçons-filles mériteraient de faire l'objet d'études complémentaires.

en faveur des élèves finlandais. Un diaporama met en évidence ces différences pour chacun des items que nous sommes autorisés à montrer.
Nous observons que les différences sont en général à l'avantage des finlandais pour les items portant sur la « vie réelle » et que les items plus abstraits et plus formels tendent à donner l'avantage aux Français (voir par exemple, ci-dessous, les résultats de l'item 1 de la question « pommiers » et ceux de l'item 3 de la même question).
Il semble important de préciser que la différence globale observée entre la France et la Finlande disparaîtrait totalement si l'on mettait de côté, en France, les 10% de jeunes qui réussissent le moins bien.
En réalité, alors que seulement 7% des jeunes finlandais de 15 ans se placent aux niveaux 1 ou en dessous de ce niveau, sur une échelle allant de 1 à 6[(8)], 17% des jeunes français de même âge tombent dans cette catégorie. Cela confirme le fait que la France ne réussit pas bien en ce qui concerne l'éducation mathématique pour tous. À l'autre extrémité de l'échelle (niveau 6), on trouve 7% des jeunes finlandais, mais seulement 3% des Français. Ce fait est peut-être moins inquiétant que celui qui concerne les bas niveaux. Rappelons ici que PISA évalue les compétences mathématiques en relation avec la vie et avec la formation générale du citoyen et non les compétences mathématiques en général.
Le diaporama présenté lors de la conférence présente toutes les questions de mathématiques des études PISA 2000 et 2003 que nous sommes autorisés à rendre publiques, avec les taux de réussites enregistrés pour l'ensemble de l'OCDE, pour la Finlande et pour la France, ainsi que les réussites extrêmes obtenus dans les pays de l'OCDE et dans l'ensemble des pays ayant participé à l'étude[(9)].

5.2. Mathématiques ?

Le domaine mathématique peut être étendu ou restreint suivant les conceptions qu'on peut avoir. Certaines questions du domaine mathématique de PISA sont de nature à surprendre les professeurs français. Ils n'y reconnaissent pas nécessairement les mathématiques qu'ils s'efforcent d'enseigner. En même temps, ils reconnaissent en général l'utilité sociale du savoir impliqué par ces questions. Même chose pour les mathématiciens (professionnels) lorsqu'ils s'intéressent à la question : en effet, l'appartenance des questions de PISA dans la construction des théories mathématiques ne paraît pas toujours évidente.

---

(8) La méthodologie de construction des échelles est assez complexe. Elle inclut une analyse *a priori* du domaine et des validations croisées impliquant les représentants des pays participants aussi bien que les équipes techniques chargées de la construction des questions d'évaluation. Elle inclut ensuite une reconstruction et une validation utilisant les résultats de l'étude. Cette partie utilise les techniques modernes d'analyse des réponses aux items (basées sur le calcul des probabilités) conduisant par des méthodes itératives à accepter ou à rejeter des items à un niveau donné.
En fin de compte, les items et les élèves se trouvent placés sur la même échelle.
Pour plus de précision, le lecteur pourra se reporter à la présentation qui est faite sur le site de l'APMEP du cadre de référence de PISA (Bodin, A. 2005 – Classification …).
(9) Ce diaporama peut être téléchargé à l'adresse donnée dans les références.

Quantités, variations et relations, espace et formes, incertitude, … sont modélisés dans les théories mathématiques, mais sont aussi présentes dans les situations communes, utilisant le sens commun et le langage commun.

PISA, dans son souci de coller au réel, ne peut pas éviter d'utiliser abondamment le langage courant pour présenter ces questions. Dans certains cas, la compréhension de textes qui ne peuvent, en aucune façon, être qualifiés de textes mathématiques, devient la principale difficulté que les élèves ont à affronter. Bien sûr cela fait partie de l'activité mathématique normale, mais le vrai travail mathématique ne commence qu'une fois cette étape franchie. Ici, il n'est jamais sûr que l'habillage des questions ou le type de langage utilisé ne soient pas ce qui empêche nombre d'élèves de résoudre des questions qui, sur le plan mathématique, peuvent apparaître comme tout à fait triviales.

Des études de corrélation entre les résultats individuels obtenus dans les domaines de la lecture (reading literacy) et la « culture » mathématique seraient nécessaires pour pouvoir approfondir cette question.

En fait, nombres, quantités, etc. apparaissent aussi dans les questions de PISA relatives aux domaines « science » et « problem solving »[10]. Il n'est pas toujours évident de comprendre pourquoi PISA place telle ou telle question dans l'un des domaines « science » ou « problem solving » (ou même « lecture ») plutôt que dans le domaine mathématique. En particulier, certaines questions du domaine « problem solving » qui induisent des activités de type logique auraient pu être ajoutées aux questions du domaine mathématique pour l'analyse que nous faisons ici. C'est une idée que nous gardons en réserve.

5.3. L'exemple de la question « pommiers »

Cette question est typique des mathématiques de la vie réelle (et de l'évaluation authentique) que l'OCDE cherche à promouvoir. Dans ce contexte, selon le cadre de référence de l'étude, une bonne question doit amener l'élève à :

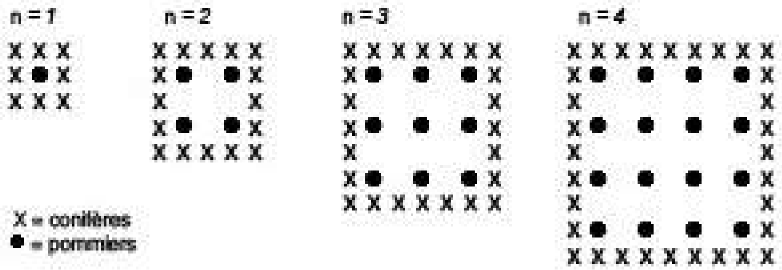
1. Partir de la réalité.
2. Organiser le problème en fonction de concepts mathématiques.
3. Effacer progressivement la réalité au travers de divers processus, tels que la formulation d'hypothèses concernant l'identification des principales caractéristiques du problème, la généralisation et la formalisation (… et de transformer le problème réel en un problème mathématique qui soit le reflet fidèle de la situation).
4. Résoudre le problème mathématique.
5. Comprendre la solution mathématique et l'appliquer à la situation réelle (ce qui implique aussi d'identifier les limites de la solution).

(10) Qu'il serait trompeur de traduire par « résolution de problèmes ».

POMMIERS

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres du vent, il plante des conifères tout autour du verger.

Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre (n) de rangées de pommiers :



Question 1 : POMMIERS M136Q01- 01 02 11 12 21 99

Complétez le tableau :

n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Question 2 : POMMIERS M136Q02- 00 11 12 13 14 15 99

Il existe deux expressions que vous pouvez utiliser pour calculer le nombre de pommiers et le nombre de conifères dans cette situation :

Nombre de pommiers = n^2

Nombre de conifères = $8n$

où n est le nombre de rangées de pommiers.

Il existe une valeur de n pour laquelle le nombre de pommiers est égal au nombre de conifères. Trouvez cette valeur de n et expliquez votre méthode pour la calculer.

....

....

Question 3 : POMMIERS M136Q03 - 01 02 11 21 99

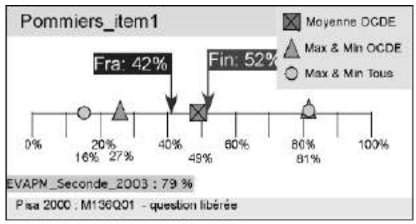
Supposez que le fermier veuille faire un verger beaucoup plus grand, avec de nombreuses rangées d'arbres. Lorsque le fermier agrandit le verger, qu'est-ce qui va augmenter le plus vite : le nombre de pommiers ou le nombre de conifères ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

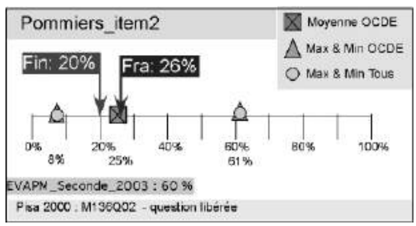
....

....

Pour l'item 1, il s'agit d'abord de comprendre la situation (l'histoire !) et, ensuite, d'être capable de compléter et d'extrapoler un tableau. Il suffit de compter pour pouvoir compléter les quatre premières lignes. Pour la cinquième ligne, l'élève peut soit prolonger la suite de figures et compter, soit utiliser les régularités du tableau(11).

Les 10% de différence entre les résultats finlandais et français (voir encadré Pommiers_item 1)(12) illustrent la relative timidité des élèves français devant ce genre de questions (traduisant un manque certain d'initiative). Une partie d'entre eux, ne disposant pas d'une procédure apprise, toute prête, pour répondre, sont arrêtés à ce point.





À l'inverse, ceux qui surmontent cette première difficulté réussissent nettement mieux l'item 2 que leurs homologues finlandais (62% au lieu de 38%, si l'on ne prend en compte que les élèves qui ont franchi la première étape). Ce cas est généralisable.

Pour cet item, la mathématisation est quasi évidente et conduit à une équation à résoudre dans **N** : $n^2 = 8n$.

Les élèves français sont familiarisés avec ce type d'équation qu'ils rencontrent le plus souvent directement sous forme … formelle, non réaliste. Nous pouvons même supposer qu'une partie d'entre eux auront fait une résolution mathématiquement correcte, factorisant $[n(n-8) = 0]$, trouvant les deux valeurs 0 et 8, puis éliminant la valeur 0 et reconnaissant que la valeur 8 est la seule qui convienne pour le problème donné (point 5 ci-dessus).

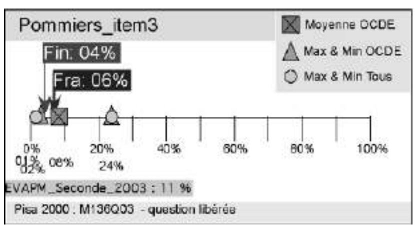
(11) La littérature anglo-américaine parle dans ce cas de « pattern ».

(12) Les pourcentages donnés sont les pourcentages de réussite observés sur l'ensemble des élèves ayant passé la question. Ici, 52% des finlandais ont réussi l'item 1 contre 42% des français. Le cadre indique aussi les scores maximums enregistrés pour les pays de l'OCDE (81%, pour la Corée) et pour l'ensemble des pays ayant participé à l'étude (dans ce cas, aussi 81%) et les scores minimums pour les pays de l'OCDE (27%, pour la Mexique) et pour l'ensemble des pays ayant participé à l'étude (16%, pour le Brésil).

Cependant une partie des élèves (en France comme en Finlande) auront donné la réponse correcte en utilisant la démarche incorrecte suivante :

$$n^2 = 8n \Leftrightarrow n = 8 \text{ car } n \times n = 8 \times n \Leftrightarrow n \cancel{\times n} = 8 \cancel{\times n}.$$

Une autre procédure consistait à étendre le tableau jusqu'à la ligne $n = 8$.
Ces procédures parmi lesquelles au moins une est mathématiquement incorrecte ont été considérées comme correctes (il est vrai avec attribution d'une part des points ou d'une partie selon le cas). Cela soulève une question de nature épistémologique : quelles mathématiques sont en jeu ? qu'est-ce qui est valorisé ?
Il ne s'agit pas pour nous de mettre en cause l'intérêt de cette question, ni sa pertinence dans le test, ni même sa légitimité à être intégrée de la façon choisie dans la construction d'une échelle (où tout ce qui permet d'obtenir la réponse attendue tend à être considéré comme valable !). Ce que nous voulons soulever est le besoin d'études qualitatives complémentaires destinées à analyser d'un point de vue mathématique et didactique les procédures suivies par les élèves.
L'item 3 demande de comparer des « vitesses » de variation. Cela pourrait conduire à comparer la croissance des dérivées des fonctions f telle que $f(n) = n^2$ et g telle que $g(n) = 8n$, et donc, en fin de compte à comparer des dérivées seconde.
Cependant, les élèves concernés ne sont pas supposés avoir étudié les dérivées… Il leur est seulement demandé d'avoir une approche personnelle de la question. Plusieurs procédures sont possibles, qui ont des intérêts mathématiques différents, mais qui sont traitées comme équivalentes.
On notera que la question n'est aucunement triviale et il n'est pas surprenant que si peu d'élèves, non seulement en Finlande et en France, mais aussi dans le reste du monde, parviennent à la résoudre d'une façon ou d'une autre.
Il est intéressant de constater, à travers ce type d'étude (ce fut aussi le cas pour TIMSS), que les vraies difficultés mathématiques, c'est-à-dire les difficultés liées aux concepts et non à l'habillage des questions sont ressenties de façon assez semblable à travers le monde.
Les 6% de succès indiqués pour l'item 3 en France, et les 4% indiqués pour la Finlande ne concernent que les procédures totalement correctes. Ils sont à comparer avec les 11% enregistrés dans les mêmes conditions au Japon et aux 11% obtenus en France, par EVAPM, en fin de seconde. Le seul pays qui fasse nettement mieux étant la Corée avec 24%.



La question des pommiers a en effet été utilisée en France dans le cadre de l'étude EVAPM de fin de seconde en 2003. Les résultats obtenus à chacun des items apparaissent dans les rectangles de résultats.

5.4. L'exemple des étagères

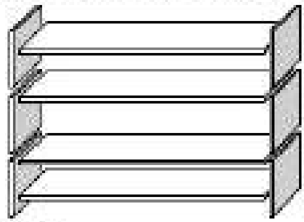
La question suivante est typiquement un cas de question mal adaptée au curriculum français : plus exactement, cette question paraît plutôt adaptée pour la fin de l'école primaire.

ETAGERES

Question 1 : ÉTAGÈRES

Pour construire une étagère complète, un menuisier a besoin du matériel suivant :

4 planches longues ;
6 planches courtes ;
12 petites équerres;
2 grandes équerres ;
14 vis.

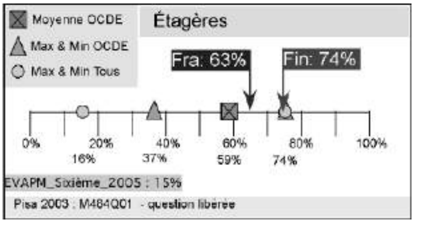


Le menuisier dispose d'un stock de
26 planches longues, 33 planches courtes,
200 petites équerres, 20 grandes équerres et 510 vis.

Combien d'étagères complètes le menuisier peut-il construire ?

Réponse : ……………………………………

En même temps, en France, chacun s'attend (et en particulier les enseignants de mathématique) à ce que les jeunes de 15 ans soient en mesure de résoudre cette question.



Le taux de succès est de 10% plus élevé en Finlande qu'en France ; cela illustre ce qui a déjà été dit sur les questions de la vie réelle.

Mais on peut se demander s'il s'agit bien d'une question de mathématiques. Ou, si l'on veut, doit-on considérer toute question impliquant des nombres comme une question de mathématiques (à tout niveau) ? Dans certains pays, cette question aurait mieux sa place dans une évaluation du domaine technologique.

Une solution mathématique pourrait être :

$$N = \min\left(\left[\frac{26}{4}\right], \left[\frac{33}{6}\right], \left[\frac{200}{12}\right], \left[\frac{20}{2}\right], \left[\frac{510}{14}\right]\right).$$

où N est le nombre maximum d'étagères que le menuisier peut faire et où $[x]$ désigne la partie entière de x.

Ici encore, il n'est pas attendu que les élèves écrivent une telle formule. En général, ils procèdent par une méthode du genre *essai-erreur*. Toutefois, s'ils devaient expliciter une preuve et s'ils devaient la formuler en langage courant, cela pourrait être encore plus difficile que d'écrire la formule ci-dessus. Ils devraient alors écrire le contenu et traduire le sens de cette formule.

Heureusement pour PISA, aucun élève ne pense à écrire une telle formule (nous ne le ferions pas davantage ailleurs que pour cet article !). De ce fait, les taux de réussite sont assez élevés : ils appartiennent pour la plupart à l'intervalle [50% ; 70%].

Mais s'agit-il encore de mathématiques ? Une bonne préparation aux questions concrètes est-elle aussi une bonne préparation à l'accès aux mathématiques plus abstraites ? Alors que de nombreux systèmes éducatifs incitent les enseignants à mettre l'accent sur le concret et la « vie réelle » (certains dans le but affiché d'obtenir de meilleurs résultats aux études internationales), la question mérite d'être posée.

Cette question, avec beaucoup d'autres, montre aussi la faible importance que l'étude PISA accorde à la question de la preuve. Sans aller jusqu'à l'idée de démonstration (totalement absente), les processus d'explication et de justification sont très peu pris en compte. Cela fait évidemment une grande différence avec les conceptions françaises habituelles concernant les acquis mathématiques.

6. Vers un minimum d'analyse didactique

La question précédente soulève directement des questions d'ordre didactique.

Quelles situations d'enseignement peuvent aider les élèves à acquérir, simultanément, des compétences dans les mathématiques du quotidien (qui sont pour une part les mathématiques du sens commun) et dans des niveaux mathématiques davantage abstraits et symboliques.

Certains objecteront que la question n'est pas pertinente et qu'il y a continuité entre les savoirs communs et le savoir théorique.

À l'opposé, comme le travail de l'école française de didactique nous a aidé à le comprendre, nous pensons que nombre de ruptures sont nécessaires et sont constitutives de la construction du savoir. Nous pouvons donc craindre que l'accent trop fort mis sur la vie réelle et sur les situations concrètes puisse, en retour, avoir des effets négatifs sur les apprentissages.

Voici encore un exemple.

La question des bonbons de couleur

Cette question est placée par PISA dans le domaine incertitude. Une valeur de probabilité est demandée.

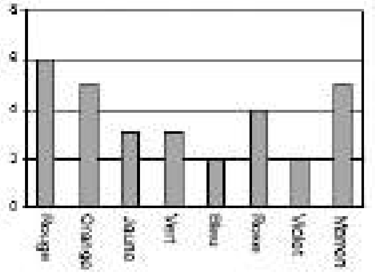
L'étude des probabilités ne figure pas dans les programmes d'étude suivis par 98% des élèves sur lesquels porte l'étude. Toutefois, les résultats en France sont du même niveau que ceux qui sont enregistrés dans l'ensemble de l'OCDE et peu inférieurs à ceux qui sont obtenus dans certains pays où les probabilités sont enseignées depuis l'école primaire.

Nous avions observé le même phénomène avec l'étude TIMSS menée sur les élèves de 13 ans. Alors que l'étude des probabilités ne figurait pas au programme du niveau concerné (Quatrième en France), les élèves français obtenaient de meilleurs résultats que les élèves de pays où les probabilités figuraient dans les programmes. D'autres observations (EVAPM) montent qu'au début de l'introduction des concepts mathématiques correspondants, les élèves ont davantage de difficulté à répondre à ce genre de question qu'avant d'avoir reçu un enseignement sur le sujet.

BONBONS DE COULEUR

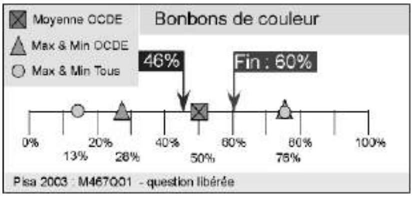
Question 1 : BONBONS DE COULEUR

La mère de Robert lui permet de prendre un bonbon dans un sachet. Robert ne peut pas voir les bonbons. Le nombre de bonbons de chaque couleur qu'il y a dans le sachet est illustré dans le graphique suivant :



Quelle est la probabilité que Robert prenne un bonbon rouge ?

A 10 %
B 20 %
C 25 %
D 50 %



À nouveau, nous pouvons parler de savoir commun : comprendre le diagramme, compter le nombre total de bonbons (30), remarquer que 6 d'entre eux sont rouges et finalement interpréter les 6 chances sur 30 de tirer un bonbon rouge comme une probabilité.

Il s'agit plutôt de langage commun et de préconceptions relatives au concept de probabilité. Donner de l'importance à ce type de tâche, qui plus est en utilisant des questions à choix multiple, et laisser les élèves (et beaucoup d'autres) croire qu'ils ont acquis des connaissances dans le domaine des probabilités ne peut que conduire à des malentendus.

Bien d'autres questions de PISA nous semblent mériter ce type d'analyse.

7. Conclusions provisoires

PISA a accumulé une masse énorme de données à travers plus de 60 pays, ce qui permet d'envisager diverses recherches. À côté des études édumétriques largement focalisées sur la construction d'échelles et la pondération des questions, il y a place pour des études qualitatives intéressantes (plus précisément des études qui articulent davantage les approches qualitatives et quantitatives).

Des ressources considérables ont été investies dans PISA, ainsi qu'une grande variété d'investissement humain et de compétences. Il serait triste, qu'en fin de compte, les élèves n'en soient pas les premiers bénéficiaires.
Dans cet article, nous avons essayé de démontrer que des précautions étaient nécessaires, mais aussi que les études PISA méritaient d'être prises au sérieux. Elles peuvent en particulier conduire les enseignants à de nouvelles questions et à de nouvelles idées susceptibles de les aider à mener un enseignement de nature à satisfaire les besoins de notre société tout en préservant les valeurs dont nous sommes dépositaires.
Cet article est aussi destiné à susciter l'intérêt des chercheurs et à justifier l'idée que des recherches complémentaires devraient être menées dans le cadre de la recherche en didactique des mathématiques.
Les études PISA, comme d'autres études internationales, peuvent aider les chercheurs à prendre de la distance par rapport aux contextes locaux et à gagner une compréhension plus globale des phénomènes liés à l'enseignement et à l'apprentissage des mathématiques, sans doute au bénéfice des futurs citoyens et consommateurs, mais surtout pour l'avancement général de la pensée humaine.

Références

Bodin, A. (2005) : Les mathématiques face aux évaluations nationales et internationales. De la première étude menée en 1960 aux études TIMSS et PISA … en passant par les études de la DEP et d'EVAPM. Communication faite au séminaire de sociologie et d'économie de l'éducation de l'EHESS (à paraître).

Bodin, A. (2005) : Classification des questions d'évaluation et cadre de référence des études PISA pour les mathématiques – présentation commentée pour les enseignants. (pages PISA du site de l'APMEP).

Bodin, A., Straesser, R., Villani, V. (2001) : Niveaux de référence pour l'enseignement des mathématiques en Europe - Rapport international - Reference levels in School Mathematics Education in Europe - International report.

Bodin A. (1997) : L'évaluation du savoir mathématique - Questions et méthodes. Recherches en Didactique des Mathématiques, Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble.

Bottani, N. & Vrignaud, P. (2005) : La France et les évaluations internationales. Haut Conseil de l'Évaluation de l'École (téléchargeable sur Internet).

Cytermann, J.R., Demeuse, M. (2005) : La lecture des indicateurs internationaux en France. Haut Conseil de l'Évaluation de l'École (téléchargeable sur Internet).

Dupé, C. & Olivier, Y. (2005) : Ce que l'évaluation PISA 2003 peut nous apprendre. Bulletin de l'APMEP n° 460 - octobre 2005.

Freudhenthal, H (1975) : Pupils' achievements internationally compared - The IEA. Educational Studies in Mathematics - Vol 1975.

Meuret, D. (2003) : Considérations sur la confiance que l'on peut faire à PISA 2000. Intervention au colloque international de l'Agence Nationale de Lutte Contre l'Illettrisme sur l'évaluation des bas niveaux de compétences, Lyon, 5 novembre 2003.

Meuret, D. (2003) : Pourquoi les jeunes français ont-ils à 15 ans des performances inférieures à celles des jeunes d'autres pays ? Revue française de Pédagogie, nº 142, 89-104.

Note DPD 04.12 (décembre) : Les élèves de 15 ans. Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2003.

OCDE 2004 : Apprendre aujourd'hui, réussir demain. Premiers résultats de PISA 2003.

OCDE 2004 : PISA 2003 Cadre d'évaluation de PISA 2003 – Connaissances et compétences en mathématiques, lecture, science et résolution de problèmes.

Robert A. (2002) : Comment peuvent varier les activités des élèves sur des exercices ? Le double travail de l'enseignant sur les énoncés et sur la gestion de la classe. Petit x nº 60.

Adresses et contacts

Note officielle française : http://www.educ-eval.education.fr/pisa2003.htm

Cadre de référence et rapports internationaux : http://www.pisa.oecd.org/

Sur le site de l'APMEP, article, diaporamas, présentation des questions libérées avec des résultats et présentation commentée, pour les enseignants, du cadre de référence de PISA :
http://www.apmep.asso.fr/rubrique.php3?id_rubrique=114

Niveaux de référence pour l'enseignement des mathématiques en Europe :
http://www-irem.univ-fcomte.fr/Presentation_ref_levels.HTM
et http://www.emis.de/projects/Ref/

Antoine Bodin : bodin.antoine@nerim.fr

Annexe 1 : Taxonomie des demandes cognitives pour la construction et l'analyse de tâches mathématiques – organisée par niveaux intégrés de complexité.

Version simplifiée, voir la taxonomie compète sur Internet

	Catégorie générale		Sous catégorie
A	**Connaissance et reconnaissance**	**A1**	des faits
		A2	du vocabulaire
		A3	des outils
		A4	des procédures
B	**Compréhension**	**B1**	des faits
		B2	du vocabulaire
		B3	des outils
		B4	des procédures
		B5	des relations
		B6	des situations
C	**Application**	**C1**	dans des situations familières simples
		C2	dans des situations familières moyennement complexes
		C3	dans des situations familières complexes
D	**Créativité**	**D1**	Utiliser dans une situation nouvelle des outils et des procédures connus
		D2	Émission d'idées nouvelles
		D3	Création d'outils et de démarches personnelles
E	**Jugement**	**E1**	Production de jugements relatifs à des productions externes
		E2	Auto-évaluation

Taxonomie adaptée par Antoine Bodin avec beaucoup de reconnaissance pour le travail initial et les conseils de Régis Gras, ainsi que pour l'influence ultérieure de W. A. Anderson.

Annexe 2 : Classes de compétences

Selon PISA – voir description complète dans le cadre de référence de PISA

Niveau		Définitions de l'OCDE	
1	**Reproduction**	Les compétences classées dans ce groupe impliquent essentiellement la reproduction de connaissances déjà bien exercées.	**Reproduction**
2	**Connexions**	Les compétences du groupe connexions sont dans le prolongement de celles du groupe reproduction, dans la mesure où elles servent à résoudre des problèmes qui ne sont plus de simples routines, mais qui impliquent à nouveau un cadre familier ou quasi-familier.	**Mathématisation simple**
3	**Réflexion**	Les activités cognitives associées à ce groupe demandent aux élèves de faire preuve d'une démarche mentale réfléchie lors du choix et de l'utilisation de processus pour résoudre un problème. Elles sont en rapport avec les capacités auxquelles les élèves font appel pour planifier des stratégies de solution et les appliquer dans des situations-problèmes qui contiennent plus d'éléments que celles du groupe connexions, et qui sont plus « originales » (ou peu familières).	**Mathématisation complexe**

Annexe 3 : L'épreuve d'examen étudié : Brevet 2005 – Sud de la France

L'expression écrite et la présentation seront notés sur 4 points (sur 40)...
Calculatrices autorisées.
Durée de l'épreuve : 2 heures

Partie I : Activités numériques (12 points)

Exercice 1 (4 points)

Dans cet exercice, tous les calculs devront être détaillés.

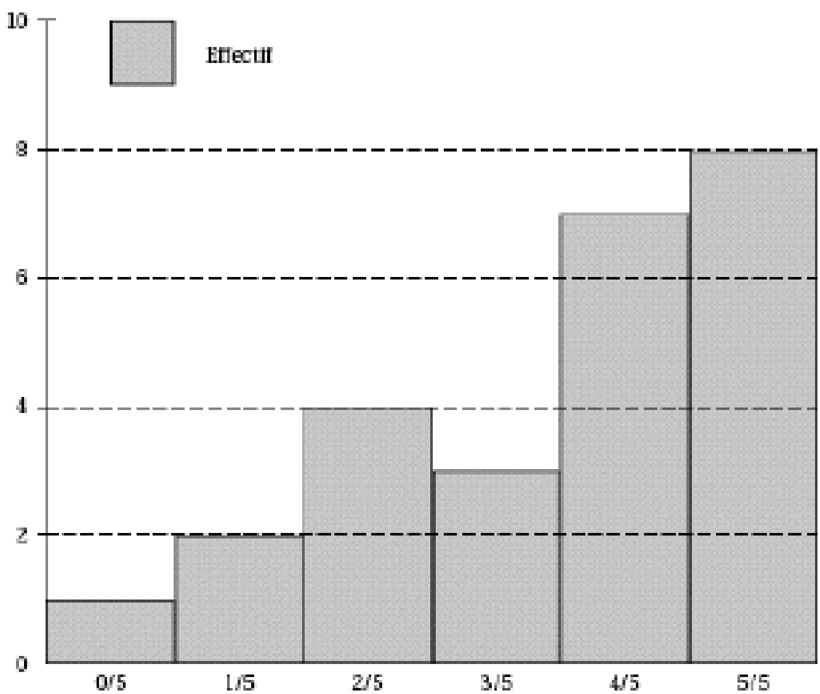
1. Calculer l'expression : $A = \frac{13}{3} - \frac{4}{3} \times \frac{5}{2}$ (donner le résultat sous sa forme la plus simple).

2. Donner l'écriture scientifique du nombre B tel que : $B = \frac{7 \times 10^{15} \times 8 \times 10^{-8}}{5 \times 10^{-4}}$.

3. Écrire sous la forme $a\sqrt{7}$ (où a est un entier) le nombre C tel que : $C = 4\sqrt{7} - 8\sqrt{28} + \sqrt{700}$.

4. Développer et simplifier : $\left(4\sqrt{5} + 2\right)^2$.

Exercice 2 (3 points)



Voici l'histogramme des notes d'un contrôle noté sur 5 pour une classe de 25 élèves.

1. Reproduire et remplir le tableau des notes suivant.

Note	0	1	2	3	4	5
Effectif						
Effectif cumulé croissant						

2. Calculer la moyenne des notes de la classe.
3. Quelle est la médiane des notes de la classe ?
4. Calculer la fréquence des notes inférieures ou égales à 3 points sur 5.

Exercice 3 (2 points)

Répondre aux questions suivantes. (Les calculs pourront être totalement faits à la calculatrice : on ne demande pas d'étapes intermédiaires ni de justification).

a) Donner un arrondi au centième du nombre A tel que : $A = \dfrac{831-532}{84}$.

b) Convertir 3,7 heures en heures et minutes.

c) Donner un arrondi au millième du nombre B tel que : $B = \dfrac{\dfrac{53}{51}-\dfrac{32}{85}}{\dfrac{63}{34}}$.

d) Calculer à 0,01 près $C = \sqrt{\dfrac{83+167}{158}}$.

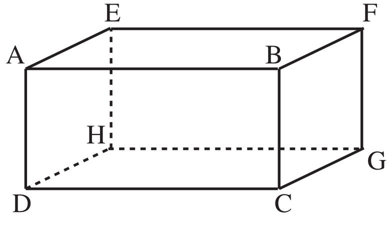
Exercice 4 (3 points)

1. Trouver le PGDC de $6\,209$ et $4\,435$ en détaillant la méthode.
2. En utilisant le résultat de la question précédente, expliquer pourquoi la fraction $\dfrac{4\,435}{6\,209}$ n'est pas irréductible.
3. Donner la fraction irréductible égale à $\dfrac{4\,435}{6\,209}$.

II. Activités Géométriques (12 points)

Exercice 1 (5 points)

ABCDEFGH est un parallélépipède rectangle. On donne AE = 3 m ; AD = 4 m ; AB = 6 m.



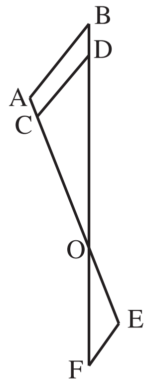
1. a) Que peut-on dire des droites (AE) et (AB) ? Le justifier.
   b) Les droites (EH) et (AB) sont-elles sécantes ?

2. a) Calculer EG. On donnera la valeur exacte.
   b) En considérant le triangle EGC rectangle en G, calculer la valeur exacte de la longueur de la diagonale [EC] de ce parallélépipède rectangle.

3. Montrer que le volume de ABCDEFGH est égal à 72 m^3.

4. Montrer que l'aire totale de ABCDEFGH est égale à 108 m^2.

Exercice 2 (3 points)



Sur le dessin ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont parallèles, les points A, C, O, E sont alignés ainsi que les points B, D, O et F. (On ne demande pas de faire le dessin).
De plus, on donne les longueurs suivantes :
CO = 3 cm, AO = 3,5 cm, OB = 4,9 cm, CD = 1,8 cm, OF = 2,8 cm et OE = 2 cm.

1. Calculer (en justifiant) OD et AB.
2. Prouver que les droites (EF) et (AB) sont parallèles.

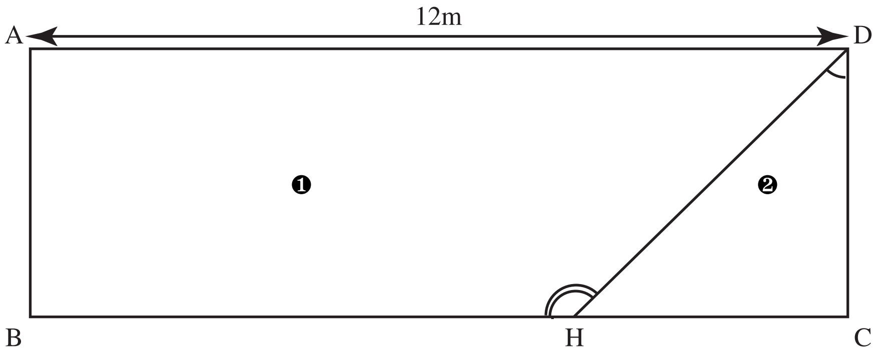
Exercice 3 (4 points)

Soit ABC un triangle tel que AB = 4,2 cm, BC = 5,6 cm, AC = 7 cm.

1. Faire une figure en vraie grandeur.
2. Prouver que ABC est rectangle en B.
3. Calculer le périmètre et l'aire de ABC.

III. Problème (12 points)

On dispose d'un séjour rectangulaire dans lequel on veut réaliser un petit cagibi triangulaire. Pour cela, on veut installer une cloison.



Voici ci-dessus, une représentation de la pièce.
La partie ❷ est le cagibi et la partie ❶ représente le séjour après la création du cagibi.
La cloison a été dessinée en pointillés.

Dans le problème, on considérera que la cloison a une épaisseur nulle.

Les trois parties sont indépendantes.

Partie 1 (3 points)

On considère que $x = 3$ m.

1. Quelle est la longueur de la cloison (en pointillé) ?

2. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{\text{HDC}}$.

3. Calculer la valeur (à 1° près) de l'angle $\widehat{\text{DHB}}$.

Partie 2 (6 points)

1. a) Exprimer la surface au sol du cagibi ❷ en fonction de x, sous la forme $f(x) = \ldots$
   b) Exprimer la surface au sol du séjour ❶ en fonction de x, sous la forme $g(x) = \ldots$

2. On admet que $f(x) = 2x$ et que $g(x) = 48 - 2x$.
   a) Quelle est la nature de la fonction f ? Quelle est la nature de la fonction g ?
   b) Tracer dans un repère (abscisse : 1 cm pour 0,5 unités et en ordonnées, 1 cm pour 5 unités) les représentations graphiques des fonctions f et g pour x compris entre 0 et 10.

3. On veut que le séjour ❶ ait une surface minimale de 35 m^2.
   a) Lire sur le graphique la valeur maximale de x pour que cette condition soit respectée.
   b) Écrire une inéquation qui traduise que la surface du séjour doit être supérieure ou égale à 35 m^2.
   c) Résoudre cette inéquation.

Partie 3 (3 points)

On réalise une maquette de cette pièce, avant la création du cagibi, à l'échelle 1/200.

1. Rappeler ce que signifie « échelle 1/200 ».

2. Quelle sera, sur la maquette, la longueur du mur de 12 m ?

3. La surface réelle du séjour est de 48 m^2. Quelle est la surface du sol du séjour dans la maquette (en cm^2) ?

4. Le volume du séjour de la maquette est de 13,125 cm^3. Quel est le volume réel du séjour (en cm^3, puis en m^3) ?

Annexe 4 : Relation de PISA avec les programmes français

Tableau synoptique des programmes du collège – En majuscules gras : notions abordées par PISA

	Sixième	Cinquième	Quatrième	Troisième
Configurations, constructions et transformations.	Cercle. Triangles, triangles particuliers. Rectangle, losange. Transformation de figures par symétrie axiale. **PARALLELEPIPEDE RECTANGLE.**	**PARALLELOGRAMME.** Construction de triangles (Instruments et/ou logiciel géométrique). Concours des médiatrices d'un triangle. Transformation de figures par symétrie centrale. Prismes droits, cylindres de révolution.	**TRIANGLE : THEOREMES RELATIFS AUX MILIEUX DE DEUX COTES.** Triangles déterminés par deux droites parallèles coupant deux sécantes : proportionnalité de longueurs. Droites remarquables d'un triangle, leur concours. Triangle rectangle et son cercle circonscrit. Transformation de figures par translation. **PYRAMIDES**, cône de révolution.	Polygones réguliers. Théorème de Thalès et réciproque. Transformation de figures par rotation ; composition de symétries centrales ou de translations. Vecteurs, somme de deux vecteurs. Sphère. Problèmes de sections planes de solides.
Repérage, distances et angles.	Abscisses positives sur une droite graduée. Repérage par les entiers relatifs, sur une droite graduée (abscisse) et dans le plan (coordonnées).	Repérage sur une droite graduée, distance de deux points. Repérage dans le plan (coordonnées). Inégalité triangulaire.	Relation de proportionnalité : représentation graphique. Théorème de Pythagore et sa réciproque. Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle. Cosinus d'un angle aigu.	Représentation graphique d'une fonction linéaire ou affine. Coordonnées du milieu d'un segment. Coordonnées d'un vecteur. Distance de deux points. Trigonométrie dans le triangle rectangle.
Grandeurs et mesures.	**PERIMETRE ET AIRE D'UN RECTANGLE, AIRE** d'un triangle rectangle. Longueur d'un cercle. Volume d'un parallélépipède rectangle à partir d'un pavage.	Somme des angles d'un triangle. Aire du parallélogramme, du triangle, du disque. **MESURE DU TEMPS.** Aire latérale et volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution.	**GRANDEURS QUOTIENTS COURANTES.** Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.	Grandeurs composées. Aire de la sphère, volume de la boule.
Nombres et calcul numérique.	**ECRITURE DECIMALE ET OPERATIONS +, -, X. DIVISION PAR UN ENTIER** : quotient et reste dans la division euclidienne, **DIVISION APPROCHEE.** Troncature et arrondi. Écriture fractionnaire du quotient de deux entiers, simplifications.	Successions de calculs, priorités opératoires. Produit de fractions. Comparaison, somme et différence de fractions de dénominateurs égaux ou multiples. Comparaison, somme et différence de nombres relatifs en écriture décimale.	Opérations (+, -, x, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée). Puissances d'exposant entier relatif. Notation scientifique des nombres. Touches et cos d'une calculatrice ; Inverses.	Calculs comportant des radicaux. Fractions irréductibles. Exemples simples d'algorithmes et applications numériques sur ordinateur.
Calcul littéral.	**SUBSTITUTION DE VALEURS NUMERIQUES A DES LETTRES DANS UNE FORMULE.**	Égalités $k(a+b) = ka + kb$ et $k(a-b) = ka - kb$. Test d'une égalité ou d'une inégalité par substitution de valeurs numériques à une ou plusieurs variables.	Développement d'expressions. Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. **EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE.**	Factorisation (identités). **PROBLEMES SE RAMENANT AU PREMIER DEGRE.** Inéquations. Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.
Fonctions numériques.	**APPLICATION D'UN TAUX DE POURCENTAGE.** Changements d'unités de longueur, d'aire. **ETUDE D'EXEMPLES RELEVANT OU NON DE LA PROPORTIONNALITE.**	Mouvement uniforme. Calcul d'un pourcentage, d'une fréquence. **CHANGEMENTS D'UNITES DE TEMPS** et de volume. Coefficient de proportionnalité.	Vitesse moyenne. Calculs faisant intervenir des pourcentages. **CHANGEMENTS D'UNITES POUR DES GRANDEURS QUOTIENTS COURANTES.** Applications de la proportionnalité.	Étude générale de l'effet d'une réduction, d'un agrandissement sur des aires, des volumes. Problèmes de changements d'unités pour des grandeurs composées. Fonctions linéaires et affines.
Représentation et organisation de données.	**EXEMPLES CONDUISANT A LIRE, A ETABLIR DES TABLEAUX, DES GRAPHIQUES.**	Classes, effectifs d'une distribution statistique. Fréquences. **DIAGRAMMES A BARRES, DIAGRAMMES CIRCULAIRES.**	Effectifs cumulés. Fréquences cumulées. **MOYENNES.** Initiation à l'usage de tableurs-grapheurs.	Approche de la comparaison de séries statistiques.

Annexe 5 : Relation entre l'épreuve du brevet et les programmes français

Tableau synoptique des programmes du collège – En majusucles gras : notions prises en compte épreuve BREVET				
	Sixième	**Cinquième**	**Quatrième**	**Troisième**
Configurations, constructions et transformations.	Cercle. **TRIANGLES, TRIANGLES PARTICULIERS.** **RECTANGLE**, losange. Transformation de figures par symétrie axiale. **PARALLELEPIPEDE RECTANGLE.**	Parallélogramme. **CONSTRUCTION DE TRIANGLES (INSTRUMENTS ET/OU LOGICIEL GEOMETRIQUE).** Concours des médiatrices d'un triangle. Transformation de figures par symétrie centrale. Prismes droits, cylindres de révolution.	**TRIANGLE : THEOREMES RELATIFS AUX MILIEUX DE DEUX COTES.** **TRIANGLES DETERMINES PAR DEUX DROITES PARALLELES COUPANT DEUX SECANTES : PROPORTIONNALITE DE LONGUEURS**. Droites remarquables d'un triangle, leur concours. Triangle rectangle et son cercle circonscrit. Transformation de figures par translation. Pyramides, cône de révolution.	Polygones réguliers. **THEOREME DE THALES ET RECIPROQUE.** Transformation de figures par rotation ; composition de symétries centrales ou de translations. Vecteurs, somme de deux vecteurs. Sphère. Problèmes de sections planes de solides.
Repérage, distances et angles.	Abscisses positives sur une droite graduée. Repérage par les entiers relatifs, sur une droite graduée (abscisse) et dans le plan (coordonnées).	Repérage sur une droite graduée, distance de deux points. Repérage dans le plan (coordonnées). Inégalité triangulaire.	Relation de proportionnalité : représentation graphique. **THEOREME DE PYTHAGORE ET SA RECIPROQUE**. Distance d'un point à une droite. Tangente à un cercle. **COSINUS D'UN ANGLE AIGU.**	**REPRESENTATION GRAPHIQUE D'UNE FONCTION LINEAIRE OU AFFINE.** Coordonnées du milieu d'un segment. Coordonnées d'un vecteur. Distance de deux points. **TRIGONOMETRIE DANS LE TRIANGLE RECTANGLE.**
Grandeurs et mesures.	**PERIMETRE ET AIRE D'UN RECTANGLE, AIRE D'UN TRIANGLE RECTANGLE**. Longueur d'un cercle. **VOLUME D'UN PARALLELEPIPEDE RECTANGLE** à partir d'un pavage.	**SOMME DES ANGLES D'UN TRIANGLE**. Aire du parallélogramme, du triangle, du disque. **MESURE DU TEMPS.** Aire latérale et volume d'un prisme droit, d'un cylindre de révolution.	Grandeurs quotients courantes. Volume d'une pyramide, volume et aire latérale d'un cône de révolution.	Grandeurs composées. Aire de la sphère, volume de la boule.
Nombres et calcul numérique.	**ECRITURE DECIMALE ET OPERATIONS +, -, X.** Division par un entier : quotient et reste dans la division euclidienne, division approchée. Troncature et **ARRONDI**. **ECRITURE FRACTIONNAIRE DU QUOTIENT DE DEUX ENTIERS, SIMPLIFICATIONS.**	**SUCCESSIONS DE CALCULS, PRIORITES OPERATOIRES.** **PRODUIT DE FRACTIONS.** **COMPARAISON, SOMME ET DIFFERENCE DE FRACTIONS DE DENOMINATEURS EGAUX OU MULTIPLES**. Comparaison, somme et différence de relatifs en écriture décimale.	Opérations (+, -, x, :) sur les nombres relatifs en écriture décimale ou fractionnaire (non nécessairement simplifiée). **PUISSANCES D'EXPOSANT ENTIER RELATIF.** **NOTATION SCIENTIFIQUE DES NOMBRES.** **TOUCHES ET COS D'UNE CALCULATRICE ; INVERSES.**	**CALCULS COMPORTANT DES RADICAUX.** **FRACTIONS IRREDUCTIBLES.** Exemples simples d'algorithmes et applications numériques sur ordinateur.
Calcul littéral.	**SUBSTITUTION DE VALEURS NUMERIQUES A DES LETTRES DANS UNE FORMULE.**	Égalités k(a+b) = ka + kb et k(a-b) = ka – kb. Test d'une égalité ou d'une inégalité par substitution de valeurs numériques à une ou plusieurs variables.	**DEVELOPPEMENT D'EXPRESSIONS.** Effet de l'addition et de la multiplication sur l'ordre. **EQUATIONS DU PREMIER DEGRE A UNE INCONNUE.**	Factorisation (identités). **PROBLEMES SE RAMENANT AU PREMIER DEGRE. INEQUATIONS.** Systèmes de deux équations du premier degré à deux inconnues.
Fonctions numériques.	Application d'un taux de pourcentage. **CHANGEMENTS D'UNITES DE LONGUEUR, D'AIRE.** Étude d'exemples relevant ou non de la proportionnalité.	Mouvement uniforme. Calcul d'un pourcentage, d'une fréquence. **CHANGEMENTS D'UNITES DE TEMPS ET DE VOLUME.** Coefficient de proportionnalité.	Vitesse moyenne. Calculs faisant intervenir des pourcentages. Changements d'unités pour des grandeurs quotients courantes. Applications de la proportionnalité.	**ETUDE GENERALE DE L'EFFET D'UNE REDUCTION, D'UN AGRANDISSEMENT SUR DES AIRES, DES VOLUMES.** Problèmes de changements d'unités pour des grandeurs composées. **FONCTIONS LINEAIRES ET AFFINES.**
Représentation et organisation de données.	**EXEMPLES CONDUISANT A LIRE, A ETABLIR DES TABLEAUX, DES GRAPHIQUES.**	Classes, **EFFECTIFS D'UNE DISTRIBUTION STATISTIQUE.** **FREQUENCES. DIAGRAMMES A BARRES**, diagrammes circulaires.	**EFFECTIFS CUMULES**. Fréquences cumulées. **MOYENNES.** Initiation à l'usage de tableurs-grapheurs.	Approche de la comparaison de séries statistiques.