Vers un socle commun en mathématiques
Quelques pistes de réflexion

Viviane Durand-Guerrier(*)

Résumé : Dans ce texte, je m'attache à présenter quelques pistes visant à nourrir la réflexion collective sur ce que pourrait être un socle commun en mathématiques. Je m'appuie pour cela sur quelques exemples fondamentaux choisis dans les programmes de l'école obligatoire et illustrant diverses articulations : entre logique et mathématiques, entre propriétés géométriques et propriétés numériques, entre mathématiques et autres disciplines, …

Introduction

Ce texte est issu de la conférence que j'ai donnée au séminaire de l'APMEP en mai 2005. À la demande des organisateurs, j'ai essayé de proposer quelques pistes de réflexion pour aller vers un socle commun des connaissances en mathématiques. J'ai accepté de relever le défi, tout en sachant que je ne pourrai évidemment faire plus que de montrer des directions qui me semblent importantes si l'on veut aller dans le sens d'une appropriation des connaissances mathématiques par le plus grand nombre. Dans cette perspective, trois éléments me paraissent essentiels. Le premier concerne

(*) IUFM de Lyon, LIRDHIST-UCBL Lyon1, IREM de Lyon. 13 bis, quai Pierre Scize 69009 Lyon. vdurand@univ-lyon1.fr

l'importance d'ancrer les mathématiques dans leurs relations avec les différents champs de la connaissance humaine. Il est selon moi de toute première importance que les mathématiques scolaires ne se construisent pas comme un isolat, campant superbement sur leurs certitudes, mais se confrontent aux situations du monde sensible qu'elles modélisent, et auxquelles elles apportent en retour l'efficacité de leurs méthodes. Ceci est une condition *sine qua non* pour que chaque élève trouve dans les mathématiques de la scolarité obligatoire ce dont il aura besoin lorsqu'il quittera l'école, et ceci quelles que soient ses aspirations professionnelles et individuelles. Le second concerne la nécessité de mettre au cœur de l'activité mathématique les objets, leurs propriétés et leurs relations ; cela suppose que soient prises en compte explicitement dans l'enseignement les questions liées à la généralité, à la nécessité et à la contingence, lesquelles sont indissociables de tout progrès en mathématiques. La troisième concerne l'intérêt d'un travail explicite de mathématisation interne aux mathématiques elles-mêmes comme contribuant de manière essentielle au processus de conceptualisation par le va-et-vient entre l'étude d'une notion au sein du réseau théorique dans lequel elle est insérée, et un questionnement dans des situations, qui peuvent être de type expérimental, pour lesquelles sa contribution est déterminante. J'ai choisi, pour illustrer ces éléments, trois entrées qui me semblent particulièrement importantes. La première concerne la nécessaire articulation entre le développement des compétences en logique et le travail sur les notions mathématiques au programme. Je l'illustrerai avec un exemple relevant de la géométrie. Le deuxième concerne l'importance de mettre au cœur des préoccupations de l'enseignement l'articulation entre le numérique et le géométrique, dont je donnerai sans les développer quelques exemples significatifs. Le troisième concerne les relations entre les mathématiques et les autres champs disciplinaires, et je l'illustrerai par l'exemple de la relation entre grandeurs, nombres et mesures à l'école élémentaire.

Avant de rentrer dans le vif du sujet, je voudrais rappeler que le projet d'une appropriation des connaissances mathématiques par le plus grand nombre d'élèves, et d'une manière générale d'apprenants, adultes y compris, est fondateur de l'idée même de développer un champ scientifique dont l'objet d'étude porte sur les conditions et les possibilités d'un enseignement des mathématiques dans la perspective de leur apprentissage. Ce projet a été porté à la fin des années soixante par quelques pionniers et par la volonté d'une communauté représentée en France en particulier par l'APMEP et par les IREM, et a donné naissance à la Didactique des Mathématiques, qui s'est imposée peu à peu comme champ scientifique autonome grâce à la mise en place des formations doctorales, et qui a aujourd'hui un rayonnement international, comme le montre la distinction attribuée à Guy Brousseau(1) pour l'ensemble de son œuvre par la Commission internationale pour l'enseignement des mathématiques, ainsi que Bernard Parzysz le rappelait dans la présentation du dossier Didactique dans le numéro 457 du Bulletin. D'une certaine manière, ce texte s'inscrit dans la suite de ce dossier Didactique, car c'est en

(1) Dont la version française de la communication qu'il a donnée à cette occasion à Copenhague en juillet 2004 a été publiée dans le Bulletin n° 457.

m'appuyant à la fois sur mon expérience de chercheur en Didactique des Mathématiques, de formatrice d'enseignants et d'enseignantes à différents niveaux du cursus secondaire et universitaire, que j'ai élaboré ce texte.

I. Quelques éléments clés pour guider la réflexion

Les six points que je présente brièvement ci-dessous sont les points sur lesquels je fonde l'élaboration des situations de formation pour les professeurs d'école stagiaires au sein de l'IUFM de Lyon, ainsi que les situations de formation de formateur. Ce sont aussi ceux que j'ai retenus comme étant le moteur de mes réflexions lorsque j'essaye de penser à ce que serait un socle commun des connaissances.

1. Comme les travaux de Vergnaud (1991) le mettent en évidence, et contrairement à une idée commune selon laquelle l'accès au concept se ferait sous la forme d'une « illumination soudaine », la conceptualisation est un processus long et difficile. Les concepts s'élaborent progressivement à travers un ensemble de situations significatives permettant d'une part la mise en place d'invariants opératoires – des théorèmes en actes –, et d'autre part la mobilisation des catégories explicites de la connaissance que sont : les objets, leurs propriétés, les relations qu'ils entretiennent entre eux, les théorèmes et les théories. Une conséquence en est que les catégories logiques participent pleinement du processus de conceptualisation en mathématiques et doivent donc être travaillées à l'occasion des activités mathématiques. Ceci est au cœur de l'exemple présenté au paragraphe II.
2. Pour une rencontre effective avec les savoirs mathématiques, il est pertinent de proposer des situations mathématiques organisées autour de quatre aspects essentiels : les situations d'action, de formulation, de validation et d'institutionnalisation (Brousseau, 1998). Ceci s'appuie en particulier sur le fait que les mathématiques enseignées dans le cadre de la scolarité obligatoire offrent des moyens d'agir avec et sur les *objets du monde*, ce que, selon moi, la situation de l'agrandissement du puzzle, imaginée par Guy Brousseau, met bien en évidence (Brousseau, 2005).
3. Une partie importante du travail du professeur consiste à choisir ce qu'il va proposer à ses élèves, en fonction des potentialités *a priori* qu'il aura repérées, vis-à-vis des apprentissages visés. Ceci constitue la part invisible du travail du professeur ; elle est déterminante pour la réussite des apprentissages et n'est évidemment pas réductible aux questions de pédagogie. De nombreux travaux articulant étroitement des études épistémologique et didactique(2) offrent des pistes sérieuses pour cela, dans la mesure où les premières ouvrent un large champ des possibles que les secondes mettent à l'épreuve de la réalité de la classe.
4. La créativité mathématique repose de manière essentielle sur la possibilité d'aborder un problème mathématique posé dans un domaine donné en le convertissant dans un autre champ (Douady, 1986 ; Duval, 1995). À cet égard,

(2) Brousseau, 1998 ; Artigue & Robinet, 1982 ; Dorier, 2000 ; Arsac, 1987, 2003 ; Battie, 2003 ; Durand-Guerrier 2005.

on peut parler de modélisation intra-mathématique, en particulier grâce aux articulations entre le domaine numérique et le domaine géométrique.

5. La possibilité de réinvestir les résultats mathématiques dans d'autres champs de la connaissance humaine rend nécessaire que soient travaillés en classe les gestes propres à la mathématisation des phénomènes intra et extra mathématique (Legrand, 1993).
6. Les situations de recherche favorisent la rencontre effective avec les objets mathématiques et leurs propriétés et la mobilisation de différents invariants opératoires (Payan & Grenier, 1998). Outre le fait que ces situations permettent de travailler sur les heuristiques et les méthodes de preuve, elles peuvent également servir d'appui pour le développement des savoirs et savoir-faire en lien avec les programmes de la classe (Dias & Durand-Guerrier, 2005).

II. Articulation entre logique et mathématique

Aline Robert, dans le deuxième article du dossier Didactique du numéro 457 du Bulletin (Robert, 2005) met en évidence les effets des modifications d'un énoncé tant sur le travail des élèves que sur celui du professeur. Je me propose de montrer, sur un exemple classique, les possibilités offertes par un type d'énoncé suffisamment ouvert pour permettre de travailler simultanément les questions de logique et les propriétés des quadrilatères(3).

II.1. Travailler sur la généralité

L'énoncé ci-dessous est celui d'un exercice classique d'application du théorème de Thalès, classiquement attaché au nom de Pierre Varignon (1731).

ABCD est un quadrilatère convexe(4).

On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA].
Démontrer que le quadrilatère IJKL est un parallélogramme

Donné sous cette forme, l'énoncé favorise la réalisation d'une figure, sur laquelle le résultat attendu apparaîtra comme « évident ». La preuve mobilise, par exemple, la version du théorème de Thalès connue sous le non de « Théorème de la droite des milieux ». Une fois le résultat établi, on va le plus souvent en rester là, en annonçant comme conclusion : « le quadrilatère IJKL est un parallélogramme », sans énoncer le résultat général correspondant : si en outre la figure a été fournie avec l'exercice, le fait que l'on ait établi un énoncé général reste totalement caché. Or, cette situation recèle de nombreuses potentialités qui, dans un tel cas, ne sont pas exploitées.
Pour réinscrire la situation dans sa dimension générale, on peut pour commencer en donner une formulation plus ouverte, sans fournir de figure.

(3) Ce qui est présenté ici a déjà fait pour partie l'objet d'une publication dans les actes du séminaire 2004 de l'IREM de Montpellier.
(4) La condition de convexité n'est pas nécessaire pour les résultats présentés ; cependant, pour un travail dans le cadre de la scolarité obligatoire, il me semble préférable de commencer à travailler avec des quadrilatères convexes.

ABCD est un quadrilatère convexe. On note I, J, K, L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA]. Quelle est la nature du quadrilatère IJKL ?

Il est dans ce cas assez vraisemblable que certains élèves reconnaîtront sur les dessins qu'ils auront réalisés, outre le fait que IJKL est un parallélogramme, quelques figures particulières : carré, losange ou rectangle, ce qui peut motiver la question de savoir quelle figure on obtient en appliquant ce procédé. Dans la suite du texte, pour des raisons de commodité d'écriture, je noterai Ψ la fonction qui à un quadrilatère associe le quadrilatère dont les sommets sont les milieux de ses côtés. Étant donné un quadrilatère quelconque, on constate que toutes les figures obtenues sont des parallélogrammes. Au besoin, si tous les élèves ont obtenu des figures particulières, on introduit d'autres exemples pour faire apparaître des parallélogrammes qui ne soient ni des rectangles, ni des losanges. On peut aussi proposer aux élèves des figures toutes différentes sur les propriétés desquelles on aura joué afin d'obtenir un répertoire de figures variées.

On est alors conduit à faire une conjecture :
C1 : *l'image d'un quadrilatère convexe par Ψ est toujours (nécessairement) un parallélogramme.* Ceci permet de poser clairement la question de la généralité, et introduit la preuve par élément générique, tout à fait classique en mathématique :

> Soit Q un quadrilatère convexe ; A, B, C et D ses sommets ; I, J, K et L les milieux respectifs des segments [AB], [BC], [CD], [DA] ; ce sont les sommets de l'image de Q.
> L'application de la réciproque du théorème de Thalès permet d'affirmer que [IJ] et [KL] sont parallèles à [AC] et que [IL] et [KJ] sont parallèles à [BD].
> On en déduit que l'image du quadrilatère Q par la fonction Ψ est un parallélogramme.
> *On a prouvé le théorème de géométrie euclidienne :*

T1 : L'image de tout quadrilatère convexe par la fonction Ψ est un parallélogramme.

Une conséquence de ce résultat est que, étant donné un quadrilatère convexe Q, nécessairement l'image de Q par la fonction Ψ est un parallélogramme ; une fois le résultat établi, on n'a plus besoin pour le savoir de construire son image. La reconnaissance de l'importance des énoncés généraux pour pouvoir déduire des propriétés d'objets est une compétence logico-mathématique essentielle, que l'on peut travailler dès le collège et même dès l'école élémentaire, et qui pourtant n'est pas toujours disponible chez les étudiants arrivant à l'université. Pour qu'elle puisse se développer, il est nécessaire de porter attention, dans la classe de mathématiques, à la généralisation des résultats et à la formulation des énoncés généraux, ce qui est le plus souvent passé sous silence, venant renforcer les effets d'une pratique généralisée de quantification implicite des énoncés universels(5).

(5) Pour la question de la quantification implicite des énoncés universels, voir Durand-Guerrier, 1999, 2005 ; Chellougui, 2003.

II.2. Travailler sur les conditions nécessaires et/ou suffisantes

Dès lors que l'on a obtenu des figures variées, vont apparaître d'autres constats et partant d'autres questions. Par exemple, dans certains cas (mais pas tous), l'image de Q est un losange. Autrement dit le fait d'obtenir un losange est contingent : il est possible d'obtenir un losange, mais ce n'est pas nécessaire, puisqu'on peut également obtenir une image qui n'est pas un losange. Ceci appelle une question : à quelle(s) condition(s) (nécessaires, suffisantes, nécessaires et suffisantes) sur Q l'image d'un quadrilatère convexe donné Q est-il un losange ?[6]
Toujours en s'appuyant sur les figures obtenues par les élèves, qui servent ici de référents empiriques, on peut explorer la question et proposer une nouvelle conjecture :

C2 : Lorsque Q *est un carré, ou plus généralement un rectangle, son image par* Ψ *est un losange.*

Il est facile d'établir ce résultat en utilisant le fait que dans un rectangle, les diagonales ont même longueur. Par conséquent, Q est un rectangle est une condition suffisante ; autrement dit, dès que Q est un rectangle, nécessairement son image est un losange. Et nous sommes ainsi passés d'un résultat contingent à un énoncé nécessaire. Ceci est le mouvement naturel de l'activité mathématique, et nous souhaiterions que les élèves se l'approprient. Seulement cela suppose que les résultats contingents soient énoncés, autrement dit que les énoncés contingents aient droit de cité dans la classe de mathématique.
Mais naturellement, une nouvelle question se pose. On voudrait en effet bien savoir si cette condition est nécessaire. Autrement dit (version positive) : Soit Q un quadrilatère convexe dont l'image est un losange. Peut-on affirmer que Q est un rectangle ? ou bien (version négative) : Peut-on trouver des quadrilatères autres que les rectangles dont l'image est un losange ?
L'exploration des conséquences pour Q de l'hypothèse que son image est un losange permet d'établir que :

T2 : Tout quadrilatère convexe dont l'image par la fonction Ψ est un losange a ses diagonales de même longueur.

Par suite, aucun quadrilatère convexe dont les diagonales sont de longueurs différentes n'a pour image un losange, ou encore : étant donné un quadrilatère Q dont les diagonales sont de longueurs différentes, on peut affirmer que son image n'est pas un losange.
À ce stade, nous ne savons toujours pas si des quadrilatères convexes autres que les rectangles ont pour image par Ψ un losange. Le plus naturel sans doute est de se demander si la condition « avoir des diagonales de même longueur » est suffisante ou non ; ce qui revient à se demander si la réciproque du théorème T2 est un théorème ; ce qui est bien le cas, comme on le montre aisément.
D'autre part, il existe des quadrilatères dont les diagonales ont même longueur qui ne sont pas des rectangles. Notons que ce résultat n'est pas aussi évident qu'il y paraît

(6) Pour un travail approfondi sur ces questions, voir Deloustal-Jorand, 2004.

pour des élèves habitués à travailler avec des figures particulières de la classe des parallélogrammes[7], or il est possible que ce cas n'apparaisse pas si les élèves ont choisi eux-mêmes les figures de départ.
Une conséquence logique de ce qui précède, c'est qu'il existe au moins un quadrilatère dont l'image est un losange qui ne soit pas un rectangle.
En conclusion : être un rectangle est une condition suffisante, mais non nécessaire, pour que l'image d'un quadrilatère convexe par Ψ soit un losange.
On peut naturellement se poser les mêmes questions concernant les conditions pour avoir un rectangle, ou un carré. On peut ensuite s'intéresser à ce qui se passe si on applique la fonction Ψ à l'image d'un quadrilatère particulier Q donné et se demander si on peut savoir quel type de quadrilatère on obtiendrait si on itérait le procédé un certain nombre de fois. On pourra établir que l'image d'un carré est nécessairement un carré ; que l'image d'un losange est nécessairement un rectangle et vice-versa. Que si on part d'un quadrilatère convexe à diagonales perpendiculaires, on obtiendra un rectangle, puis un losange, puis un rectangle et ainsi de suite. Que si on part d'un quadrilatère convexe dont les diagonales ont des longueurs différentes et ne sont pas perpendiculaires, on obtiendra à chaque rang un parallélogramme dont les diagonales ont des longueurs différentes et ne sont pas perpendiculaires, etc.

II.3. Quelques Commentaires

Ce qui est présenté ici constitue un premier niveau d'analyse *a priori* visant à mettre en évidence les richesses potentielles d'une situation. D'autres jeux et d'autres cheminements sont évidemment possibles, et l'on peut en particulier travailler avec des quadrilatères non convexes et faire surgir de nouvelles questions. Cependant, pour l'utiliser avec des élèves, il reste à faire un travail d'élaboration, de choix d'organisation des situations, de modalités de travail que je ne développe pas ici, mais pour lesquelles la théorie des situations, mais aussi les dispositifs innovants comme le *problème ouvert* (Arsac & al., 1991) offrent des pistes fructueuses. La dynamique collective peut être, alors, utilisée en choisissant des modalités d'organisation pertinentes.

Ce que je souhaitais principalement mettre en évidence, c'est le fait qu'une suite de situations construites autour de ce questionnement permet de travailler simultanément sur les aspects logiques concernant l'implication et sur les propriétés mathématiques des quadrilatères convexes. Sur le plan logique, on confronte les élèves à la question de la généralité, de la nécessité et de la contingence, et à la question des réciproques dans une situation non artificielle. Sur le plan mathématique, d'une part l'on utilise le dessin comme un support pour établir des conjectures en posant explicitement la question de la généralisation des observations

(7) Comme le montrent les résultats obtenus avec des étudiants entrant à l'université qui, pour un quart d'entre eux, à la question : « un quadrilatère ABCD a ses diagonales perpendiculaires, est-ce un losange ? » répondent « oui », car le seul contre-exemple à cet énoncé est le carré, mais le carré est un losange particulier (ceci est détaillé dans Durand-Guerrier, 1999).

faites sur des dessins singuliers, et d'autre part on mobilise les propriétés des diagonales en dehors de l'ensemble des parallélogrammes où elles sont habituellement confinées. Ce questionnement est rendu possible par le fait que la fonction Ψ *transporte* sur les côtés du quadrilatère *image* les propriétés des diagonales du quadrilatère *antécédent*, ce qui conduit à travailler sur une forme de dualité entre propriétés des côtés et propriétés des diagonales, anticipant par là-même certaines formes expertes du travail mathématique.
Je n'ai pas précisé le niveau d'enseignement auquel on peut proposer ce type de situation ; comme de nombreuses situations de recherche, il peut être proposé à différents niveaux du cursus, ce qui aura un effet sur les notions mathématiques travaillées. Comme le montre de travail de Virginie Deloustal-Jorrand (2004), même des professeurs certifiés stagiaires de mathématiques peuvent se trouver en difficulté devant un problème de recherche de conditions nécessaires et suffisantes sur des objets géométriques élémentaires.

III. Travailler les articulations entre géométrique et numérique

Une des spécificités du travail mathématique est sans doute sa grande plasticité au sens où un problème donné peut être posé dans un certain cadre et travaillé et/ou résolu dans un autre (voire d'autres) cadre(s). Deux résultats emblématiques de cette spécificité appartiennent au cursus de la scolarité obligatoire. Il s'agit, bien entendu, du théorème de Pythagore, qui articule une propriété métrique avec une égalité numérique et du théorème de Thalès qui articule une propriété affine avec une relation de proportionnalité. Ces deux résultats sont à eux seuls des sortes de *miracles*, que nous avons tendance à banaliser, tant ils nous semblent naturels. Et pourtant, quoi de moins naturel *a priori* que de pouvoir traduire des propriétés géométriques dans le cadre numérique. Dans l'histoire des mathématiques, pour aller un peu vite, la géométrie était, en quelque sorte, première dans la mesure où de nombreux résultats sur les nombres étaient établis dans le cadre géométrique. Avec l'apparition des méthodes algorithmiques de résolution d'équations et l'introduction des fonctions numériques, on assiste à une sorte de renversement de tendance, où ce sont les outils numériques qui servent à établir des résultats de géométrie. Ce phénomène se retrouve dans l'enseignement actuel, et particulièrement au collège, où il y a peu de travail à l'intérieur du cadre géométrique ; la plupart des exercices et problèmes de géométrie proposés aux élèves étant résolus par un passage dans le cadre numérique, principalement via les théorèmes de Thalès ou Pythagore ou leurs variantes, sans, le plus souvent, que la pertinence du modèle numérique soit interrogée. En outre, à l'exception de quelques situations d'enseignement s'appuyant sur l'histoire des mathématiques, il est assez rare qu'un résultat établi dans le cadre géométrique soit utilisé pour prouver un résultat dans le domaine du numérique.

Revenons maintenant aux situations d'agrandissement, pour lesquelles on a un résultat peu naturel : *Pour agrandir une figure polygonale, il faut multiplier les mesures de ses côtés par un même nombre*. Ces situations sont particulièrement intéressantes du point de vue de l'articulation des domaines puisqu'en effet se rencontrent ici trois phénomènes : la conservation de la forme, qui renvoie à un *aspect perceptif*, la conservation des angles, qui renvoie à un *aspect géométrique*, et l'égalité des rapports de longueurs qui renvoie à un *aspect numérique*. Les notions mathématiques associées sont tout à fait centrales dans le curriculum : théorème de Thalès, homothéties, similitudes, proportionnalité, et elles fournissent des outils efficaces pour *agir dans le monde*, pour reprendre une des rubriques des programmes de 1995 de l'école maternelle. Les situations d'agrandissement, dont la situation du puzzle de Brousseau est paradigmatique, permettent de travailler les relations entre les propriétés géométriques et les objets sensibles, auxquels s'appliquent les contraintes du réel : pour reconstituer le puzzle agrandi, il est nécessaire de conserver les angles au sommet des différents triangles qui permettent de décomposer les pièces, ce qui se traduit par les relations sur les mesures des côtés(8). C'est ceci qui permettra de déterminer, avant de construire, ce que doivent être les mesures des côtés. On trouve cette articulation entre numérique et géométrique dans de nombreux domaines mathématiques : la trigonométrie, l'étude des courbes et des surfaces algébriques, l'étude des fonctions numériques, le calcul intégral, le calcul différentiel, l'algèbre linéaire, etc. En ne profitant pas suffisamment des opportunités offertes par ce travail de va-et-vient entre les cadres géométrique et numérique, on se prive de la possibilité de faire partager aux élèves ce qui permet de comprendre *la redoutable efficacité des mathématiques dans ses applications aux différents domaines de la connaissance humaine*.

D'une manière plus générale, on peut penser que ce déficit dans l'enseignement obligatoire, et au-delà, du travail dans le domaine géométrique est lié à la disparition de la prise en compte explicite de la dimension expérimentale des mathématiques(9). Ce phénomène se manifeste également dans le champ du numérique par la prévalence des procédures syntaxiques, qui mobilisent des règles de transformation d'écritures, au détriment des procédures sémantiques, qui mobilisent les objets et leurs propriétés(10). Une des conséquences, et non des moindres, étant le primat accordé, dans l'apprentissage de la démonstration, au travail sur les énoncés, au détriment du travail sur les objets et sur leurs propriétés.

On peut noter cependant une évolution dans les programmes par l'insistance sur le lien avec les autres disciplines qui se marque par l'introduction explicite de la modélisation au collège et au lycée d'une part, par la réintroduction de la notion de grandeur à l'école élémentaire d'autre part. C'est ce dernier point que je vais aborder maintenant.

---

(8) Une étude comparative franco-danoise conduite avec des futurs professeurs de collège des deux pays (douze dans chaque pays) montre que ces liens ne sont pas toujours faits (Winslow & Durand-Guerrier, 2005).

(9) Sur le rôle de la dimension expérimentale des mathématiques dans l'élaboration des connaissances mathématiques, voir Dias & Durand-Guerrier, 2005.

(10) Pour un développement de ces questions, voir Durand-Guerrier, 2005.

IV. Grandeurs, mesures et nombres à l'école élémentaire(11)

IV.1 Les grandeurs avant la mesure

Dans les nouveaux programmes de l'école primaire qui ont commencé à prendre effet à la rentrée 2002, la rubrique *Mesures* a été remplacée, pour les cycles 2 et 3, par la rubrique *Grandeurs et mesures*. C'est sans doute le changement le plus important pour les mathématiques dans ce programme, et le plus significatif d'une évolution dans les intentions des auteurs des instructions officielles. En effet, introduire la notion de grandeur en la distinguant de la notion de mesure permet de rendre visibles deux faits essentiels :

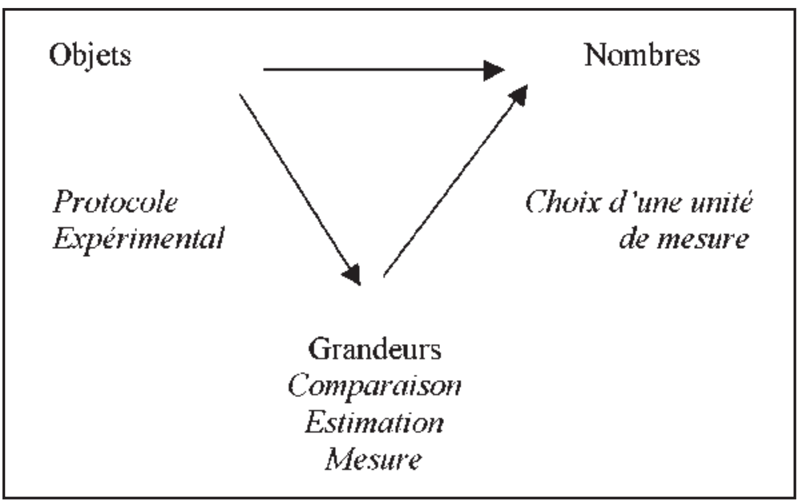
1. Une grandeur est une qualité attribuée à des objets, permettant de faire des comparaisons suivant un ordre total : étant donnés deux objets, on peut toujours les comparer du point de vue de la grandeur choisie. On peut associer une ou plusieurs grandeurs à une catégorie d'objets indépendamment de toute unité : la longueur, l'aire, le volume, la contenance, la masse, etc.
2. La notion de grandeur est liée à *un protocole expérimental* qui permet des comparaisons lorsque les contrôles sensoriels, en particulier perceptifs, ne suffisent pas. La première rencontre avec la notion de grandeur passe par la manipulation d'objets et l'élaboration de protocoles expérimentaux permettant les comparaisons. Par exemple, pour comparer des objets du point de vue de leur longueur, il faut décider quelles caractéristiques de l'objet vont être utilisées pour la comparaison : pour les êtres humains, ce peut être la taille, mais aussi l'envergure ou le tour de cou ; pour le cheval, le garrot ; dans chaque cas, il faut structurer l'objet pour définir précisément ce qui va permettre la comparaison ; ceci fait, on doit choisir avec quoi l'on va faire la comparaison ; dans certains cas, la perception suffit de manière indiscutable ; il n'y a alors rien à faire de plus. Sinon, on peut faire des comparaisons directes, par exemple pour la taille, en se mettant dos à dos ; pour comparer des affiches roulées, on peut les dérouler et les mettre bord à bord, etc. On peut faire des comparaisons indirectes en utilisant des objets intermédiaires : un bâton sur lequel on fait des encoches ; des ficelles souples que l'on coupe ; des instruments de report de longueur comme le compas, par exemple pour comparer des lignes brisées. D'une manière générale, pour comparer des longueurs, lorsque la perception ne suffit pas, on se ramène à une situation correspondant à la comparaison de segments parallèles. C'est en définitive ceci, ajouté à la possibilité de mettre les segments bout à bout qui garantit l'additivité, qui permet de caractériser la longueur comme une grandeur et qui permet de décider si on peut attribuer une longueur à un objet donné. Il est tout à fait clair que si l'on ne travaille avec les élèves que la comparaison de segments parallèles, pour lesquels, dans la plupart des cas, la perception suffit à trancher, on ne construit pas la notion de longueur.

(11) Cf. Guy Brousseau (1987) : Les différents univers de la mesure et leurs situations fondamentales, Juin 1987, http://math.unipa.it/~grim/mesure.pdf, ainsi que Brousseau (2001). N.D.L.R. Voir « Grandeurs, mesures », brochure APMEP n° 46 (134 pages ; 4,60 €) (cf. plaquette « Visages 2005-2006 de l'APMEP », p. 43).

La mise en œuvre d'un protocole expérimental pour comparer des grandeurs n'est pas toujours chose facile. Dès que l'on quitte les longueurs pour les aires, le niveau de complexité augmente et en dehors de polygones et de quelques figures ad hoc, à l'école élémentaire, on a peu de moyens pour comparer les aires. Il est en revanche plus facile de comparer les volumes par le biais des contenances. Le problème de Galilée qui consiste à comparer les volumes de deux cylindres que l'on peut construire à partir d'une forme rectangulaire non carrée donnée(12) permet de faire élaborer une conjecture, puis de la mettre à l'épreuve par un dispositif expérimental adéquat en réalisant les deux cylindres et en comparant leurs contenances respectives. Cette situation a de nombreux prolongements, tant du côté expérimental – un étalon étant choisi, on peut, par exemple, regarder comment évolue le rapport des contenances en fonction du rapport des longueurs des côtés –, que du côté mathématiques où le calcul, littéralement, montre ce rapport. Comme le met en évidence Cerquetti-Aberkane F. (1999), on peut également travailler à partir de cette situation sur des approximations du nombre π.

IV.2. Des grandeurs aux nombres

Jusque-là, je n'ai pas encore parlé de mesure ; la notion de mesure intervient lorsque l'on fait le choix d'un étalon, c'est-à-dire d'une mesure unitaire de référence ; on va pouvoir alors, sous certaines conditions, attribuer un nombre qui sera la mesure de la grandeur pour l'unité choisie et faire des comparaisons indirectes, y compris si les objets dont on veut comparer les mesures sont dans des lieux distincts. En ce sens, le nombre attribué constitue la mémoire de la mesure, sous réserve qu'il soit associé à



Relations entre objets, grandeurs, mesure et nombres

(12) Cette toile rectangulaire joue le rôle de face latérale ; dans chaque cas, pour réaliser effectivement le cylindre, on ajoute le fond adapté.

l'étalon correspondant ; on pourra par exemple utiliser cette information pour passer des commandes, une fois un étalon commun déterminé. Les choses ne sont pas cependant aussi simples que ce qui précède pourrait le laisser croire. Historiquement, la découverte de l'impossibilité de trouver une unité permettant de mesurer en nombres entiers chacun des trois côtés d'un triangle rectangle isocèle, qui correspond à l'irrationalité de la racine carrée de 2, a joué un rôle important dans le développement des mathématiques(13) et, d'une manière générale, les questions de mesure sont liées à l'apparition de nouveaux nombres.

IV.3. Mesurer des grandeurs

Le cas le plus simple est celui du cardinal d'une collection. Les objets sont les collections ; la grandeur associée est la taille de la collection ; elle peut être estimée à vue dans certains cas, sinon, la comparaison se fait par la correspondance terme à terme qui joue le rôle du protocole expérimental(14). L'étalon est l'unité ; la mesure de la taille de la collection est le nombre d'unités contenues dans la collection ; c'est ce que l'on appelle le cardinal de la collection ; il s'obtient par le dénombrement associé à la structure numérique des entiers.
Le mesurage discret des grandeurs non discrètes de type géométrique (longueur, aire, volume) est étroitement lié à la nécessité d'introduire de nouveaux nombres. Le problème essentiel est de choisir une référence unitaire, ou un étalon et des méthodes de *recouvrement* de l'objet à mesurer par déplacement : juxtaposition, découpage, recomposition, pavages, etc., en lien avec la propriété d'additivité des mesures. Une des questions centrales consiste à savoir si on peut trouver un étalon permettant de mesurer en nombre entier une grandeur donnée, ce qui en général n'est pas le cas. L'enjeu principal est alors, au niveau considéré, celui de l'approximation, à l'aide de fractions, ce qui historiquement apparaît très tôt, ou à l'aide des décimaux, ce qui n'apparaîtra que beaucoup plus tard (au seizième siècle en Occident avec Stevin). Concernant les décimaux, il s'agit également de disqualifier la conception classique erronée « juxtaposition de deux entiers séparés par une virgule »(15).

IV.4. Commentaires

La réintroduction des grandeurs à l'école élémentaire va de pair avec le fait de placer au cycle 3 les mathématiques dans le champ scientifique, au lieu de délimiter un domaine mathématique isolé comme c'était le cas auparavant(16). Concernant la mesure des grandeurs, ceci a une certaine cohérence dans la mesure où la notion de grandeur est typiquement pluridisciplinaire, une grandeur étant un type de variables rencontrées dans différents domaines : mathématiques, physique, chimie, biologie, géologie, psychologie, sociologie, économie, … Définir les grandeurs que l'on se propose de mesurer, établir les protocoles expérimentaux et choisir l'étalon approprié relève de chaque discipline particulière en fonction de ses objets d'étude, les

(13) Voir par exemple Arsac, 1987.
(14) Brousseau, 1987.
(15) On trouve des analyses détaillées et des axes de travail dans Anselmo & al., 1999.
(16) Si bien qu'actuellement, le domaine mathématique en tant que tel n'apparaît plus qu'au cycle 2.

mathématiques intervenant *in fine* pour l'analyse des données recueillies. Pour les mathématiques de la scolarité obligatoire, ce sont principalement les grandeurs géométriques, la durée et la masse qui sont objets d'étude. C'est en s'appuyant principalement sur les grandeurs géométriques que l'on peut construire dès l'école primaire de manière structurée les premières relations entre objet, grandeurs, mesure et nombre dont la maîtrise est nécessaire lorsque l'on s'occupe de grandeurs non mathématiques, qui sont le plus souvent beaucoup plus complexes, en particulier pour ce qui concerne les grandeurs physiques(17), et qui n'interviennent que beaucoup plus tardivement dans le cursus.

Conclusion

J'espère avoir montré, avec cette contribution à la réflexion collective, que prendre au sérieux la question d'un socle commun des connaissances ne signifie pas nécessairement un renoncement aux ambitions légitimes que nous avons pour les élèves. Les programmes actuels de la scolarité obligatoire offrent de nombreuses opportunités pour travailler dans le sens d'un enseignement des mathématiques pour tous. S'il est tout à fait clair qu'une partie non négligeable des conditions favorisant la réussite du plus grand nombre relève de décisions institutionnelles qui nous échappent, il nous appartient en tant qu'enseignants de mathématiques, formateurs et chercheurs, de faire vivre dans les classes ces potentialités.

On trouvera la bibliographie de cet article sur le site de l'APMEP :

http://www.apmep.asso.fr

(17) Notons que la durée est une grandeur particulièrement difficile à saisir, peu propice par conséquent à servir de support à un travail pour la structuration des relations entre objets, grandeurs et mesures.