

A partir de 4 triangles rectangles isocèles

Valérie Larose

Plusieurs articles parus dans PLOT ont tenté de vous montrer l'intérêt des rallyes mathématiques au collège, en liaison éventuelle avec des classes de CM2 ou de Seconde. Je voudrais avec cet article insister sur un autre aspect très positif de ces rallyes : la correction et plus particulièrement la seconde vie d'un exercice de rallye.

Point de départ

Dans le cadre de l'écriture du rallye « automne » CM2 - 6^{ème}, nous avons avec ma collègue de CM2 choisi des exercices tirés du rallye transalpin (voir revue Math école n°212) ; l'un d'eux nous a particulièrement attirées, voici son énoncé :

Miss TroispoinTE est une passionnée de puzzles. Avec quatre triangles rectangles, isocèles, superposables, elle arrive à former des polygones différents. Dans les polygones qu'elle forme, les quatre triangles ne se recouvrent pas et ont chacun au moins un côté commun avec l'un des autres triangles. Dessinez les polygones différents que vous avez trouvés et classez-les selon le nombre de leurs côtés.

Nous avons transformé cet exercice en : *Gobert est un passionné de puzzles. Avec quatre triangles rectangles, isocèles, superposables, il arrive à former des polygones différents ; attention, les triangles ne se recouvrent pas et ont chacun au moins un côté commun avec l'un des autres triangles.*

Dessinez (sur le papier pointé fourni) tous les polygones différents que Gobert peut trouver.

Deux polygones qui se superposent après retournement de l'un d'entre eux sont considérés comme identiques.

APMEP - PLOT n° 14

Nous avons délibérément enlevé la partie tri suivant le nombre de côtés pour des questions de durée et pensant que nous pourrions ainsi l'une et l'autre le faire au moment de la correction.

Dans le temps imparti du rallye, mes élèves de 6^{ème} n'ont pas été très productifs et n'ont trouvé que 4 polygones ; l'énoncé ne mentionnant pas qu'il était autorisé de dessiner puis découper les 4 triangles, les élèves ne se sont pas autorisés à le faire du coup la recherche était mentale. Bref, je fus déçue de cette contre-performance et demandai à chacun de faire la recherche à la maison en leur fournissant les pièces à découper ainsi qu'une feuille de papier pointé.

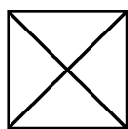
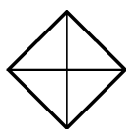
Trouver tous les polygones

Au cours suivant, je demande collectivement le nombre de polygones trouvés ; des réponses fusent, allant de 5 à 15, et déjà le débat s'installe : « ouahhhh, 15, comment t'as fait ? » ou « 15, t'as dû en dessiner en double » ou « celui-là, il n'est pas possible » ... Le silence revenu, nous passons à la mise en commun à l'aide du rétroprojecteur (comment ferais-je sans lui ?) : les élèves, à tour de rôle, viennent poser leurs 4 triangles sur la vitre et par ombre chinoise apparaît leur polygone. Certains ne peuvent pas se passer du modèle dessiné dans leur cahier pour restituer un polygone quand d'autres font travailler leur mémoire sans problème...

Chacun cherche si le polygone projeté figure sur sa feuille et, pour certains, se pose l'inévitable question « j'en ai un qui ressemble ; est-ce le même ? ». Pour valider, l'élève interrogateur scotche ses

triangles, vient poser son polygone sur la vitre du rétro et tente des retournements jusqu'à ce que toute la classe conclue en accord : le même ou pas. Les élèves n'ayant pas trouvé le polygone doivent le dessiner sur leur feuille de papier pointé (de mon côté, je le dessine à main levée au tableau et le numérote) et là se pose pour certains, un nouveau problème : selon la disposition des pièces, il est plus ou moins évident pour l'élève de tracer le polygone et les triangles tracés finissent par ne pas avoir tous les mêmes dimensions !

Je demande donc que la longueur des côtés de l'angle droit de chaque triangle soit l'unité choisie entre deux points du quadrillage, l'hypoténuse ne devant donc en aucun cas être dessinée horizontalement ou verticalement.



Le polygone de gauche est correct, celui de droite ne l'est pas.

Pour quelques élèves, la première représentation est plus difficile à concevoir que la deuxième.

Au bout d'une bonne heure, nous finissons par en dénombrer 14 (voir annexe) ; j'avoue qu'à la première lecture du sujet, je ne pensais pas en trouver autant ! La plupart des élèves s'étaient interdit (ou ne concevaient pas) des polygones non convexes (sûrement influencés par le travail fréquent sur les polygones familiers que sont les carrés/rectangles/losanges en primaire).

Tri en fonction du nombre de côtés

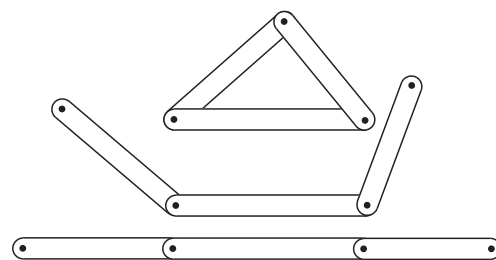
Je demande aux élèves de repasser le contour de chacun des polygones obtenus au feutre puis de ranger ces polygones en fonction du nombre de côtés. Cette tâche n'a causé aucune difficulté ; nous dénombrons donc collectivement : 1 triangle rectangle isocèle ; 5 quadrilatères ; 2 pentagones et 6 hexagones.

Les élèves ne se posent plus aucune question liée à la convexité ou non des polygones. L'un d'entre eux est perturbé par la famille des hexagones car lors de la réalisation d'un dessin géométrique en début d'année nous avons rencontré un hexagone régulier et cette image était pour lui la seule associée au mot hexagone.

Parmi les quadrilatères, certains ont des noms bien précis que nous rappelons, occasion de mettre du vocabulaire en place et d'énoncer des définitions vues en primaire, trapèze et parallélogramme étant le plus souvent source de soucis.

Tri en fonction du périmètre

Nous avons déjà vu la notion de périmètre d'un triangle : des bandes de papier correspondant chacune à un côté du triangle reliées par une attache parisienne puis dépliées pour exprimer la longueur totale des trois côtés ont permis aux élèves de se construire une image mentale du périmètre d'un triangle.



Je propose que le périmètre de chaque polygone soit reporté à l'aide du compas sur une demi-droite graduée et qu'une mesure soit donnée au mm près. Nous le faisons collectivement pour le polygone n°1 et je demande que le travail soit terminé à la maison pour le cours suivant. Et là, ce que je redoutais s'est déroulé : bagarre sur les périmètres : « 80 mm ! non 75 ! mais non 82 mm » ; si les élèves sont d'accord que plusieurs erreurs

de précision répétées lors du report des longueurs font varier les mesures finales, ils ne voient pas comment faire le classement demandé et comment gérer ceux qui ont des mesures assez éloignées des leurs... ils n'ont pas tort ces petits !

La question est donc posée : « *comment va-t-on s'en sortir ?* » et les élèves réfléchissent à voix haute. L'idée d'un même compas pour tous est exclue pour des raisons d'organisation, la vérification des reports des uns par les autres se met en place éliminant ainsi des longueurs trop éloignées puis un élève remarque que tous ces polygones ont des côtés multiples de l'unité choisie entre deux des points du papier pointé... (d'où la consigne donnée lors du tracé des polygones). Et me voilà donnée l'occasion de rebondir : ils sont très bien ces petits !

Rebond

Et c'est parti pour exprimer chacun des périmètres en fonction de u pour s'apercevoir aussi sec qu'une autre unité est en jeu, la diagonale d'un carré de base du papier pointé : on la nommera d .

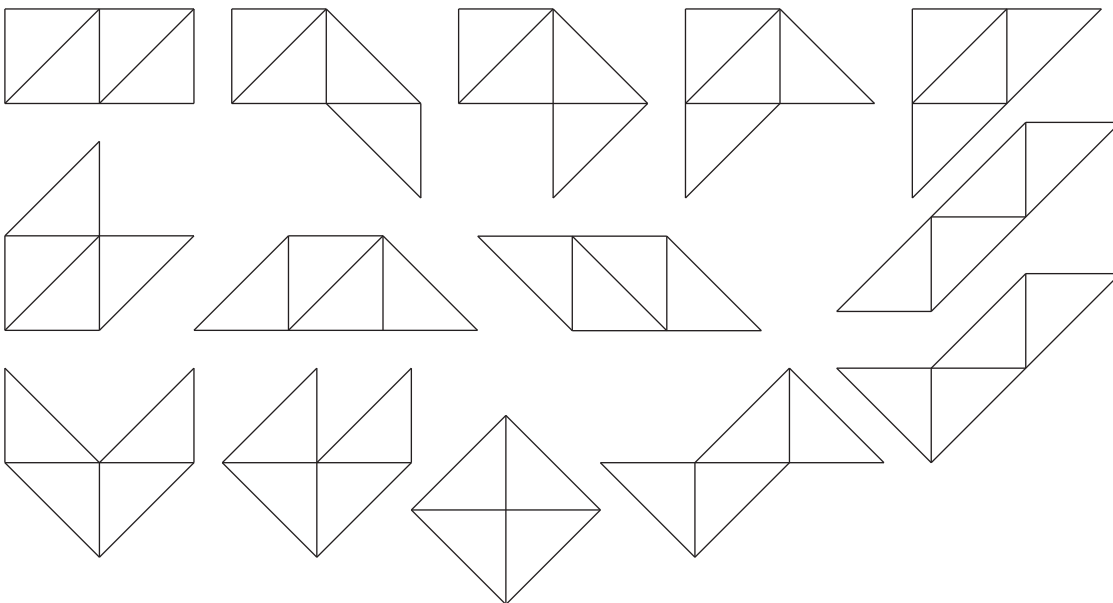
Tous se remettent au travail et expriment rapidement les périmètres en fonction de u et de d .

L'égalité de certains périmètres apparaît très vite, reste à comparer $4d + 2u$ et $2d + 4u$ entre eux, puis avec $4d$ et $6u$.

Les élèves ont alors choisi $u = 1$ cm et $d = 15$ mm et effectué les calculs (de tête) pour pouvoir conclure.

Bilan

Du calcul littéral sans peine, une activité qui a permis à tous de se mobiliser que ce soit individuellement ou collectivement, la notion de périmètre reprise (tous ces polygones de même aire n'ont pas le même périmètre ; deux polygones non superposables peuvent avoir le même périmètre), un travail avec des polygones non convexes, des élèves en situation de recherche quel que soit leur niveau en maths. C'était Noël en novembre ! Et puis, ces polygones, je pourrai aussi étudier leurs axes de symétrie... on en reparlera à Pâques !



Vous trouverez, dans la brochure « Jeux 7 », un dossier sur les *Tétrabolos* (page 11) et un sur *Shape by shape* (page 19) qui traitent du même sujet (notion de périmètre sans aucun calcul !), sans oublier, mais il est un peu plus difficile, le *Curvica* (voir « Jeux 5 ») dont une séance de classe a été relatée dans PLOT n° 2.