

Solution de Moubinool Omarjee (Lycée Jean-Lurcat, Paris).

On commence par exprimer $H(t)$ à l'aide d'une intégrale :

$$H(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_0^\pi \cos(u) \cdot \exp(2\sqrt{t} \cos(u)) du.$$

En effet, pour un $t > 0$ fixé, par le développement en série entière de l'exponentielle,

$$\frac{1}{\pi\sqrt{t}} \cos(u) \cdot \exp(2\sqrt{t} \cos(u)) = \sum_{p=0}^{+\infty} h_p(u),$$

avec

$$h_p(u) = \frac{1}{\pi p!} 2^p (\sqrt{t})^{p-1} \cos^{p+1}(u).$$

Or

$$\|h_p\|_\infty = \sup_{u \in [0, \pi]} (|h_p(u)|) = \frac{1}{\pi p!} 2^p (\sqrt{t})^{p-1}.$$

Donc, par convergence normale,

$$\frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_0^\pi \cos(u) \cdot \exp(2\sqrt{t} \cos(u)) du = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{2^p (\sqrt{t})^{p-1}}{\pi p!} I_{p+1},$$

avec, classiquement,

$$I_m = \int_0^\pi \cos^m(u) du = \begin{cases} 0 & \text{si } m \text{ est impair} \\ \frac{\pi}{4^k} \binom{2k}{k} & \text{si } m = 2k \end{cases}.$$

Ainsi, en ne gardant dans la somme que les termes tels que $p + 1$ soit pair (disons égal à $2n + 2$ pour $n \in \mathbb{N}$), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_0^\pi \cos(u) \cdot \exp(2\sqrt{t} \cos(u)) du &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2n+1}}{\pi(2n+1)!} \frac{\pi}{4^{n+1}} \binom{2n+2}{n+1} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2} \frac{1}{(2n+1)!} \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} t^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{t^n}{n!(n+1)!} = H(t).
\end{aligned}$$

L'idée est maintenant de négliger dans l'intégrale la partie « loin de 0 ». On coupe donc l'intégrale en deux :

$$\left| \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi \cos(u) \cdot \exp(2\sqrt{t} \cos(u)) du \right| \leq \frac{1}{\pi\sqrt{t}} \int_{\frac{\pi}{2}}^\pi |\cos(u)| du = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

Donc

$$H(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{t}} A(t) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right).$$

avec

$$A(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(u) \cdot \exp(2\sqrt{t} \cos(u)) du.$$

On pose $v = 1 - \cos(u)$:

$$A(t) = e^{2\sqrt{t}} \int_0^1 \frac{1-v}{\sqrt{2v-v^2}} \cdot \exp(-2v\sqrt{t}) dv.$$

Le changement de variable $v = \frac{w^2}{2\sqrt{t}}$ donne

$$A(t) = \frac{e^{2\sqrt{t}}}{t^{\frac{1}{4}}} \int_0^{\sqrt{2t}^{\frac{1}{4}}} \frac{1 - \frac{w^2}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{4\sqrt{t}}}} \cdot e^{-w^2} dw.$$

Enfin, le théorème de convergence dominée donne

$$\int_0^{\sqrt{2t}^{\frac{1}{4}}} \frac{1 - \frac{w^2}{2\sqrt{t}}}{\sqrt{1 - \frac{w^2}{4\sqrt{t}}}} \cdot e^{-w^2} dw \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} e^{-w^2} dw = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

et, comme annoncé,

$$H(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{e^{2\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{4}}}.$$