L’art d’arrondir les angles

Julien Moreau

Le texte ci-après n’utilise guère que les connaissances du collège, mais il tourne autour d’un problème qui a fait couler beaucoup d’encre et qui a des applications techniques [3] : **les courbes de largeur constante**.

A. Un premier exemple

Commençons par un exemple. Soit un triangle ABC qu’on peut supposer de sens direct, tel que BC = 6, CA = 7, AB = 8.

On prend un point P sur la droite (AB) à la distance 2 de A, hors du segment [AB]. On trace dans le sens direct un arc de cercle de centre A partant de P et aboutissant en un point Q de la demi-droite [CA). On a donc AQ = 2 et CQ = 9.

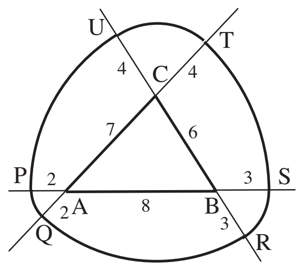

figure 1

On trace maintenant dans le sens direct un arc de cercle de centre C partant de Q et aboutissant en un point R de la demi-droite [CB). On a donc CR = 9 et BR = 3.

On continue le processus, toujours dans le sens direct : un arc RS de centre B et de rayon 3, puis un arc ST de centre A et de rayon 11 (8 + 3), un arc TU de centre C et de rayon 4 (11 – 7), enfin un arc de centre B et de rayon 10 (6 + 4) qui (par miracle ?) aboutit en P puisque BP = 8 + 2 = 10.

On a ainsi dessiné autour du triangle ce que nous appellerons un « galet(1) » limité par un contour Γ formé de six arcs de cercle. Voyons ce qui se passe en un des points de jonction de ces arcs, par exemple R. L’arc QR a en R une demi-tangente orthogonale au rayon [CR] et l’arc RS a en R une demi-tangente orthogonale au rayon [BR] ; ces deux demi-tangentes sont donc dans le prolongement l’une de l’autre. Γ a donc une tangente en chacun des points P, Q, R, S, T, U et finalement une tangente en chacun de ses points.

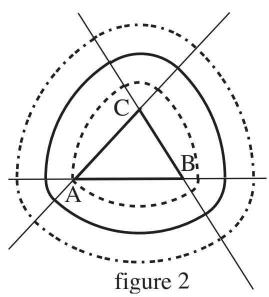

figure 2

On peut recommencer le même travail en conservant le triangle ABC et en déplaçant le point P à gauche de A sur la droite (AB). La figure 2 montre les résultats obtenus en prenant pour la distance AP les valeurs 0, 2, 4.

(1) Est--il besoin de dire que ce terme, que nous reprendrons par la suite, n’a rien de canonique ?

Nous allons montrer au § B que de telles constructions peuvent être faites à partir de n'importe quel triangle et au § C que les « galets » ainsi obtenus ont des propriétés remarquables.

B. En partant d'un triangle quelconque

B.1. La construction

Prenons au hasard un triangle ABC. On se propose encore de s'en servir comme base pour le tracé d'un « galet », c'est-à-dire de l'entourer par un tracé fait de six arcs de cercle dont les centres soient des sommets du triangle.

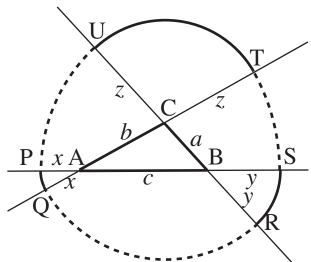

figure 3

Pour simplifier la mise en équation, au lieu de construire les arcs de proche en proche, nous allons faire un démarrage symétrique. Posons BC = a, CA = b, AB = c.

On porte sur le prolongement des côtés [AB] et [AC] à partir de A, une longueur x, ce qui donne deux points P et Q. On porte de la même façon à partir de B une longueur y, ce qui donne deux points R et S, et à partir de C une longueur z, ce qui donne deux points T et U, conformément à la figure 3. On peut alors tracer l'arc de cercle de centre A reliant P et Q, celui de centre B reliant R et S, celui de centre C reliant T et U.

On veut joindre Q et R par un arc de cercle de centre C, ce qui est possible si et seulement si $x + b = y + a$. La jonction de S et T par un arc de cercle de centre A donne de même $y + c = z + b$. Celle de U et P par un arc de cercle de centre B donne $z + a = x + c$.

Au total, l'entourage souhaité est réalisable si et seulement si :

$$\begin{cases} x+b=y+a \\ y+c=z+b \\ z+a=x+c \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ z \geq 0 \end{cases}.$$

Les trois équations ne sont pas indépendantes, car le système peut encore s'écrire

$$x - a = y - b = z - c.$$

ce qui revient, en introduisant un paramètre h, à $\begin{cases} x=a+h \\ y=b+h \\ z=c+h \end{cases}$, avec la condition que h soit au moins égal au plus grand des trois nombres $-a$, $-b$, $-c$.

Si ces conditions sont satisfaites, les six arcs de cercle forment une courbe continue Γ pourvue partout d'une tangente (y compris, lorsque aucun des nombres x, y, z n'est nul, aux points P, Q, R, S, T, U, ce qui se vérifie aisément).

Notons enfin que, si on numérote ces six arcs en partant de P, les arcs 1 et 4 ont même centre A, les arcs 2 et 5 ont même centre B, les arcs 3 et 6 ont même centre C. Nous parlerons d'arcs « opposés ».

B.2. Les cas singuliers

Si un des trois nombres x, y, z est nul, par exemple x, ce qui exige $a \leq b$ et $a \leq c$, les points P et Q sont confondus avec A ; il y a en A deux demi-tangentes, orthogonales respectivement à [AB] et [AC] ; la courbe Γ présente alors un point anguleux en A, les deux demi-tangentes formant un angle de $180° - \hat{A}$ (voir sur la figure 2 la plus petite des trois courbes).

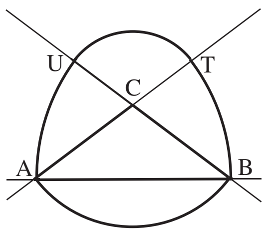

figure 4

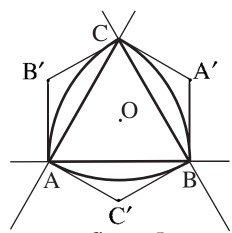

figure 5

Si deux des trois nombres x, y, z sont nuls, par exemple $x = y = 0$, ce qui exige $a = b \leq c$, les points A et B sont anguleux (figure 4).

Si les trois nombres x, y, z sont nuls, ce qui exige $a = b = c$, les points A, B et C sont anguleux, avec en chacun deux demi-tangentes formant un angle de 120° (figure 5). C'est la configuration dite *triangle de Reuleaux*.

Exercice. *Les six demi-tangentes aux sommets d'un triangle de Reuleaux déterminent un hexagone régulier*.

Avec les notations de la figure 5, l'hexagone a les mêmes symétries que le triangle ABC ; il en résulte, par rotation autour de O, que les triangles AC′B, BA′C, CB′A sont isométriques. Mais ils sont isocèles, car la symétrie de la figure par rapport à (OC) montre que AC′ = C′B. Les six côtés de l'hexagone AC′BA′CB′ sont donc égaux. Nous savons en outre que les angles en A, B et C valent 120°. Par rotation, les trois autres sont égaux entre eux. Calculons par exemple $\widehat{AC'B}$.

$$\widehat{AC'B} = 180° - \widehat{C'AB} - \widehat{C'BA} = 180° - 30° - 30° = 120°.$$

Les six angles de l'hexagone valent donc 120° et les côtés sont égaux, ce qui règle la question.

C. Propriétés des « galets »

Nous nous limiterons désormais au cas où la courbe Γ *construite à partir du triangle* ABC *n'a pas de point anguleux. Mais les résultats établis ci-après peuvent aisément s'étendre (moyennant quelques adaptations) aux cas singuliers évoqués en* B.2.

L'étude ci-après est faite dans le cas général, mais il est préférable, avec une classe, de travailler sur un exemple en imposant des valeurs simples aux quantités a, b, c, h comme au début de cet article.

C.1. Opposé d'un point de Γ

Soit M un point fixé de Γ. Quand un point mobile M′ décrit cette courbe, il existe au moins une position (*a priori* pas forcément unique) pour laquelle la distance MM′ est la plus grande possible(2). Soit N une telle position. Nous allons montrer qu'elle est unique et la déterminer.

Montrons d'abord que la tangente en N *à* Γ *est perpendiculaire à* [MN].

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors la perpendiculaire Δ en N à [MN] serait une sécante de celui(3) des arcs de cercle qui passe par N et donc le traverserait. On pourrait donc trouver un point J de Γ tel que M et J soient de part et d'autre de Δ, donc tel que [MJ] coupe Δ en un point K.

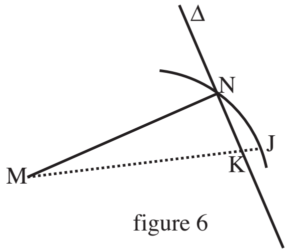

figure 6

On aurait alors MJ > MK > MN, ce qui est contraire à la définition de N.

Ainsi la droite (MN) passe par le centre de l'arc de cercle sur lequel se trouve N. Supposons que ce centre soit, par exemple, C, ce qui n'enlève rien à la généralité du raisonnement. Il en résulte que M est sur l'arc opposé à celui où se trouve N, arc qui a aussi pour centre C. Finalement le point N est le point d'intersection de la droite (MC) avec l'arc opposé à celui qui porte M. D'où le résultat suivant :

Propriété 1. *Étant donné un point* M *de* Γ, *le point* N *de la courbe le plus éloigné de* M *est sur l'arc opposé à celui qui porte* M *et le segment* [MN] *passe par le centre commun des deux arcs. Ce point* N *sera dit point opposé à* M.

Compte tenu du caractère symétrique de la construction ci-dessus, on obtient :

Propriété 2. *Si le point N est opposé à* M, *alors* M *est opposé à* N.

De ce qui précède résulte ceci :

Propriété 3. *En deux points opposés les tangentes sont perpendiculaires au segment qui les joint et parallèles entre elles.*

Soit maintenant (voir figure 7) un point L qui n'est pas dans la bande délimitée par les tangentes en M et N, et qui est situé, par exemple, du côté de N. Le segment [ML]

(2) L'existence de ce maximum demande en toute rigueur une justification. Mais ce résultat (immédiat par compacité) peut être admis au collège, voire au lycée. Une démonstration au niveau du collège est d'ailleurs faisable : il suffit de prouver l'existence du maximum de MM′ quand M′ décrit un arc de cercle et de prendre ensuite le plus grand des six maxima obtenus pour les six arcs composant Γ.

(3) Ceci suppose que N n'est pas un point de raccordement de deux arcs de Γ, mais dans ce dernier cas le raisonnement tient encore, car les deux arcs sont dans le prolongement l'un de l'autre

coupe donc la tangente en N. Soit H le point d’intersection. On a ML ≥ MH ≥ MN, l’égalité n’étant possible que si L = H = N, ce qui prouve que L ne peut appartenir à Γ. D’où :

Propriété 4. *La courbe* Γ *est tout entière dans la bande déterminée par les tangentes en deux points opposés.*

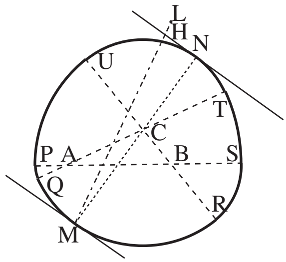

figure 7

C.2. Largeur de la courbe

Calculons la distance de deux points opposés M et N. Supposons par exemple M sur l’arc QR ; N est alors sur l’arc TU et le centre commun des deux arcs, C, appartient au segment [MN]. On a, avec les notations de la figure 3 :

$$\mathrm{MN} = \mathrm{MC} + \mathrm{CN} = (a + y) + z = a+y+z = a+(b+h)+(c+h) = a+b+c+2h.$$

Cette distance d est donnée par une formule symétrique en a, b, c, donc elle est indépendante de l’arc sur lequel se trouve le point M et de sa position sur cet arc. En outre d est la plus grande distance possible entre deux points de la courbe. Soit en effet deux points F et G de Γ ; si F′ est le point opposé à F, on a FG ≤ FF′ = d. Concluons :

Propriété 5. *La distance entre deux points opposés de* Γ *est constante, et c’est la distance maximum entre deux points de* Γ. *Elle est dite largeur de la courbe.*

Supposons le triangle de sens direct et voyons comment varie la direction de la tangente quand un point M décrit Γ dans le sens direct. Appelons α, β, γ les angles en A, B, C du triangle, conformément à la figure 8. Faisons décrire la courbe Γ par un point M dans le sens direct en partant de S, et repérons les angles par rapport à l’axe (PS) orienté de P vers S.

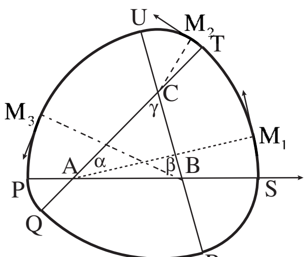

figure 8

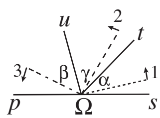

figure 8 bis

Lorsque M va de S à T, l’angle que fait avec l’axe « horizontal » (PS) le rayon [AM] de l’arc ST croît de 0 à α. Puis, lorsque M va de T à U, l’angle que fait avec l’axe le rayon [CM] de l’arc ST croît de α à $\alpha + \gamma$ (voir figure 8 bis). Et, lorsque M va de U à P, l’angle que fait avec l’axe le rayon [BM] de l’arc ST croît de $\alpha + \gamma$ à $\alpha + \gamma + \beta = 180°$.

La tangente (orientée) en M à Γ se déduit du rayon par rotation de 90°. Lorsque M décrit l’arc STUP elle tourne donc, toujours dans le même sens, de 180°. De même, lorsque M décrit l’arc PQRS, elle tourne encore dans le même sens de 180°.

Au total, nous pouvons énoncer :

Propriété 6. *Quand* M *décrit* Γ *dans le sens positif, il y a constamment « virage à gauche », la tangente orientée tournant au total de 360° et prenant donc deux fois* *chaque direction du plan*[4].

Ce dernier résultat reste évidemment valable si le triangle ABC n'est pas de sens direct, une symétrie permettant de se ramener au cas précédent.

Résumons :
Γ a deux tangentes parallèles à chaque direction Δ du plan. Elle est entièrement comprise entre ces deux tangentes et le segment qui joint les deux points de contact est orthogonal à Δ et a pour longueur la constante d.

Γ présente donc des propriétés qu'on aurait pu croire réservées aux cercles de diamètre d.

C.3. Longueur de la courbe Γ

Pour ce calcul, il suffit d'exploiter la formule donnant la longueur L d'un arc de cercle de rayon R et d'angle au centre θ : $L = R\theta$ où θ est mesuré en radians[5], ce que nous supposerons ici. Groupons les six arcs deux à deux, par couples d'arcs opposés, les notations étant celles de B.1.

La longueur de l'arc PQ est $x\alpha$, celle de l'arc ST est $(d - x)\ \alpha$; leur somme est donc $d\alpha$; en faisant la même chose pour les deux autres couples, nous trouvons pour longueur de Γ $d\ (\alpha + \beta + \gamma)$, autrement dit πd ce qui est la longueur d'un cercle de diamètre d.

Remarque. On démontre, en revanche, que l'aire délimitée par Γ est toujours strictement inférieure à celle délimitée par un cercle de diamètre d.

D. Dessiner des œufs

Les propriétés établies en C.1., C.2. et C.3. sont communes à toute une catégorie de courbes dites « de largeur constante ». Il est tentant d'essayer d'en construire d'autres en raccordant cette fois un nombre quelconque d'arcs de cercles. Cela va nous amener d'abord à étudier quelques propriétés des courbes obtenues en mettant convenablement bout à bout de tels arcs.

D.1. Fabrication d'un « œuf »

Donnons-nous un arc de cercle PQ ; prolongeons-le par un autre arc de cercle QR tel que sa demi-tangente en Q soit le prolongement de la demi-tangente en Q au premier arc, et que les deux arcs soient du même côté de leur tangente commune. Construisons ensuite par le même procédé un arc RS, puis un arc ST, etc.

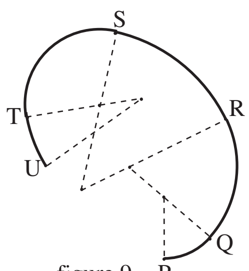

figure 9

Nous obtenons ainsi (figure 9) une courbe Γ telle que, si on la décrit à partir de P, <u>la tangente tourne toujours dans</u>

(4) Il en résulte intuitivement que la courbe est tout entière à gauche de chacune de ses tangentes, ce qui confirme la propriété 4.

(5) Si θ est mesuré en degrés, la formule est $L(\Gamma) = R\dfrac{\pi\theta}{180}$.

le même sens (positif ou négatif).

Nous dirons que cette courbe est un « œuf[6] » si les deux conditions suivantes sont réunies :
• l'extrémité du dernier arc est l'origine du premier, c'est-à-dire qu'on est revenu au point de départ ;
• en parcourant la courbe depuis l'origine du premier arc jusqu'à l'extrémité du dernier, la tangente a tourné dans un sens ou dans l'autre de 360° (au point qui est à la fois de départ et d'arrivée, il y a donc une tangente comme en tous les autres points).

Les arcs de cercle utilisés dans la construction seront dans la suite appelés les **composantes** de l'œuf. Deux arcs successifs sont évidemment supposés avoir des rayons différents, sinon on les fond en un seul.

Tout œuf est composé d'au moins quatre arcs de cercle.

Soit un œuf à trois arcs PQ, QR et RP, portés par les cercles γ, γ' et γ'' de rayons respectifs r, r' et r''. Quitte à renommer les points, il n'est pas restrictif de supposer $r > r' > r''$. Les cercles γ et γ' sont tangents intérieurement en Q, donc tout point de γ' autre que Q est intérieur à γ. De même tout point de γ'' autre que R est intérieur à γ'. Ainsi tout point de γ'' est intérieur à γ et notamment P. D'où contradiction.

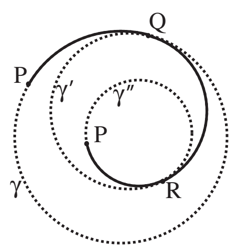

figure 10

N.B. : le même raisonnement vaut *a fortiori* pour un œuf à deux arcs.

Construction d'œufs à quatre arcs

La construction par les élèves d'œufs à quatre arcs ne pose pas de problème majeur. Il suffit, pour plus de simplicité, de partir de deux cercles extérieurs l'un à l'autre (on obtiendra ainsi un œuf allongé dans le sens de la ligne des centres), qui porteront les arcs 1 et 3.
Si on appelle r et r' leurs rayons, J et J′ leurs centres, les arcs 2 et 4 seront portés par des cercles auxquels les deux cercles initiaux soient tangents intérieurement, et dont les centres K et K′ vérifieront

$$\mathrm{KJ'} - \mathrm{KJ} = \mathrm{K'J'} - \mathrm{K'J} = r - r'.$$

En fixant par exemple la distance KJ, on obtient K par intersection d'un cercle de centre J et d'un cercle de centre J′. La construction se lit sur la figure 11.

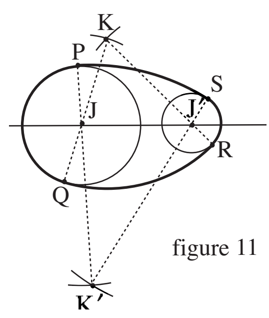

figure 11

N.B. : le travail se simplifie si on prend au départ $r = r'$. On obtient alors de chaque côté de la droite (JJ′) une classique anse de panier.

(6) Terme non canonique !

D.2. Propriété fondamentale

Tout œuf a deux tangentes parallèles à chaque direction du plan et, sauf les deux points de contact, est tout entier situé strictement entre ces deux tangentes.

Le premier point résulte de la définition même d'un œuf : si partant d'un point de la courbe on la décrit dans le sens positif pour y revenir, la direction de la tangente tourne toujours dans le sens positif de 360° en tout. Elle prend donc deux fois exactement toute direction (non orientée).

Le second point est un peu plus délicat. Choisissons une direction que nous considérerons comme horizontale ; la courbe a deux tangentes ayant cette direction. Soit J le point de contact de la courbe avec la plus basse des deux, K le point de contact avec la plus haute. Soit un point M qui décrit la courbe dans le sens direct. La demi-tangente orientée en M est constamment dirigée vers le haut quand M va de J en K, donc M monte constamment ; et quand M va de K en J, cette demi-tangente est constamment dirigée vers le bas, donc M descend constamment.

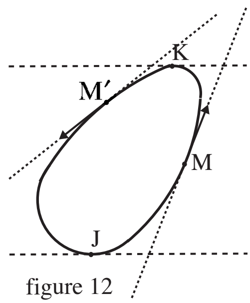

figure 12

E. Œufs de largeur constante

Nous dirons qu'un œuf est de largeur constante d si pour chaque direction Δ du plan les deux tangentes parallèles à Δ sont distantes entre elles de la quantité d.

Les « galets » étudiés dans les parties A, B et C satisfont évidemment à cette définition.

E.1. Premières propriétés

Étant donné un œuf de largeur constante d :
• la distance de deux quelconques de ses points est au plus d ;
• deux de ses points sont à la distance d si et seulement si les tangentes en ces points sont parallèles ; elles sont alors perpendiculaires au segment qui les joint.

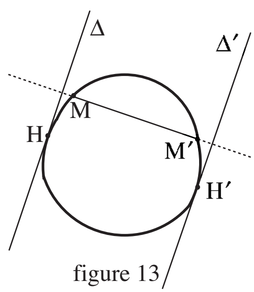

figure 13

Soient M et M′ deux points de la courbe ; appelons Δ et Δ′ les tangentes perpendiculaires au segment [MM′].La distance de ces deux droites est d et donc (propriété D.2.) $MM' \leq d$.
En outre l'inégalité est stricte sauf si M et M′ sont situés aux points de contact H et H′ de Δ et Δ′.

Inversement, soient N et N′ les points de contact de deux tangentes D et D′ ; si [NN′] n'était pas perpendiculaire à D et D′, la distance NN′ serait strictement supérieure à d.

E.2. Points opposés, arcs opposés

Sur un œuf de largeur constante, deux points seront dits opposés si les tangentes en ces deux points sont parallèles.

Soit PQ un des arcs de cercle composant l'œuf, C le centre de cet arc, ρ son rayon. Si un point M décrit l'arc PQ, la droite (MM′) qui joint le point M à son opposé M′ est orthogonale à la tangente en M, donc passe constamment par C.

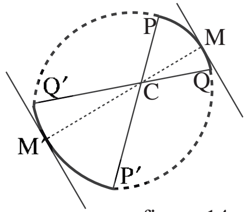

figure 14

Les points C et M′ sont du même côté par rapport à M ; la distance MM′ vaut donc CM′ = $|d - \rho|$. Quand M décrit l'arc PQ, M′ décrit donc un arc de cercle P′Q′, P′ et Q′ étant les opposés de P et Q.
Observons que l'arc P′Q′ étant par rapport à la tangente en M′ du même côté que M (comme toute la courbe), le point C est entre M et M′. Et nous obtenons en prime le résultat suivant :

Les rayons des arcs composantes de l'œuf sont tous inférieurs à d.

L'arc P′Q′ est inclus dans un des arcs composant l'œuf, mettons RS. Si cet arc débordait P′Q′, il en résulterait, en lui appliquant ce qui vient d'être établi, que les opposés des points de RS formeraient un arc de centre C incluant strictement PQ, qui du coup ne serait pas une composante de l'œuf, mais une partie d'une telle composante. P′Q′ est donc exactement une composante de l'œuf. Concluons :

Dans un œuf de largeur constante, les opposés des points d'une composante forment une autre composante, qu'on appellera l'opposée de la première.

Il en résulte aussitôt ceci :

Le nombre d'arcs de cercle composant un œuf de largeur constante est pair.

E.3. Recherche d'œufs de largeur constante à *n* composantes

Théorème 1. *Aucun œuf à quatre composantes n'est de largeur constante.*

Raisonnons par l'absurde (la figure 15 est donc évidemment fausse !). Soit P, Q, R, S les quatre points de séparation des arcs de cercle composant l'œuf.

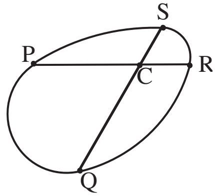

figure 15

D'après ce qui vient d'être vu, le point C intersection de (PQ) et (RS) est le centre commun des arcs PQ et RS, mais c'est aussi le centre commun des arcs QR et SP.
Les quatre arcs ont donc tous même centre, mais comme deux arcs consécutifs ont un point commun, ils forment un cercle.

Théorème 2. *Le nombre minimum de composantes pour un œuf de largeur constante est six.*

En effet, il n'y a pas d'œufs à 2 ou 3 composantes et tout œuf de largeur constante a un nombre pair de composantes. Comme 4 vient d'être exclu, la plus petite valeur *a priori* possible est 6. On a vu dans le § C qu'elle fournit effectivement des solutions.

Considérons maintenant un œuf de largeur constante à six composantes. Comme deux arcs opposés ont même centre, il y a en tout trois centres. Si ces centres étaient alignés, il y aurait plus de deux tangentes à la courbe perpendiculaires à la droite les portant. Ils forment donc un triangle. On voit alors sans mal que l'on retrouve un « galet » du type étudié aux § B et C.

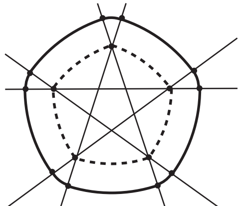

figure 16

Le lecteur pourra aisément vérifier que la figure 16 donne un exemple d'œuf de largeur constante à 10 composantes (dont les centres sont les pointes de l'étoile) et que la courbe tracée en pointillés, composée de cinq arcs de cercle, est une courbe de largeur constante à cinq points anguleux.

Il est plus laborieux de montrer qu'à partir de tout pentagone étoilé, régulier ou non, on peut, en appliquant une construction de proche en proche telle que celle utilisée au tout début de cet article (§ A), obtenir encore, comme sur la figure 17, un œuf de largeur constante.

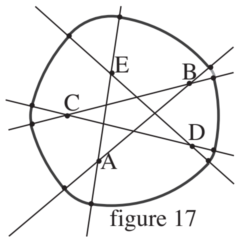

figure 17

Remarque. Signalons enfin qu'il existe une large infinité de courbes de largeur constante ne comportant aucun arc de cercle.

Bibliographie

[1] Rademacher & Toeplitz, *The Enjoyment of Mathematics*, chapitre 25, « Curves of constant breadth ».

[2] S. Cantat : http://images.math.cnrs.fr/Le-triangle-de-Reuleaux.html

[3] http://www.mathcurve.com
Sur ce bon site, aller à « courbes 2D », puis à « courbes de largeur constante ».