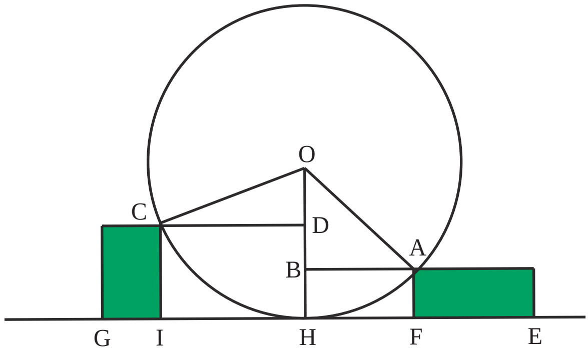
Solution de Jean-Claude Carrega (Lyon)



Nous faisons la figure dans un plan perpendiculaire à l'axe du cylindre. La trace du cylindre est un cercle de centre O.
Les traces des pavés sont des rectangles.
Pour l'un, les longueurs des côtés sont EF = 18 et AF = 10 ; pour l'autre GI = 10 et CI = 18.
Pour calculer la longueur HI = CD, on considère le triangle rectangle OCD.
On a

$$OC = R,$$
$$OD = OH - DH = OH - CI = R - 18.$$

D'où

$$CD^2 = OC^2 - OD^2 = R^2 - (R - 18)^2 = 36\,R - 324.$$

Ainsi

$$HI = CD = \sqrt{36R - 324}$$

et

$$HG = HI + GI = \sqrt{36R - 324} + 10.$$

On calcule HF de façon analogue,

$$HF = BA$$

et dans le triangle rectangle OBA, on a

$$BA^2 = OA^2 - OB^2 = R^2 - (R - 10)^2 = 20\,R - 100.$$

Ainsi

$$HF = BA = \sqrt{20R - 100}$$

et

$$HE = HF + FE = \sqrt{20R - 100} + 18.$$

On va exprimer que les longueurs HG et HE diffèrent de 4 unités. Nous distinguons deux cas.

1) Supposons HE < HG. On a alors HG = HE + 4, c'est-à-dire :

$$\sqrt{36R - 324} + 10 = \sqrt{20R - 100} + 18 + 4,$$

soit

$$\sqrt{36R - 324} = \sqrt{20R - 100} + 12.$$

En élevant au carré, on obtient

$$36R - 324 = 20R - 100 + 144 + 24\sqrt{20R - 100},$$

soit

$$16R - 368 = 24\sqrt{20R - 100}.$$

On simplifie par 8, d'où

$$2R - 46 = 3\sqrt{20R - 100}.$$

En élevant au carré, on obtient $4\ R^2 - 184\ R + 2\ 116 = 9\ (20\ R - 100)$, soit
$4\ R^2 - 364\ R + 3\ 016 = 0$, soit $R^2 - 91\ R + 754 = 0$.
Le discriminant est $\Delta = 91^2 - 3\ 016 = 5\ 265$ et

$$R = \frac{91 \pm \sqrt{5\ 265}}{2}.$$

Puisque R est supposé entier, $\sqrt{5\ 265}$ doit être entier. Ce n'est pas le cas, donc on n'est pas sous la bonne hypothèse.

2) Supposons HG < HE. On a alors HE = HG + 4, c'est-à-dire :

$$\sqrt{20R - 100} + 18 = \sqrt{36R - 324} + 10 + 4,$$

soit

$$\sqrt{36R - 324} = \sqrt{20R - 100} + 4.$$

En élevant au carré, on obtient

$$36R - 324 = 20R - 100 + 16 + 8\sqrt{20R - 100},$$

soit

$$16R - 240 = 8\sqrt{20R - 100}.$$

On simplifie par 8, d'où

$$2R - 30 = \sqrt{20R - 100}.$$

En élevant au carré, on obtient $4\ R^2 - 120\ R + 900 = 20\ R - 100$, soit
$4\ R^2 - 140\ R + 1000 = 0$, soit $R^2 - 35\ R + 250 = 0$. Le discriminant est $\Delta = 35^2 - 1000$, $\Delta = 225$ et

$$R = \frac{35 \pm 15}{2}.$$

Soit $R = 25$ ou $R = 10$.
Puisque R est supposé supérieur à 18, on obtient donc $R = 25$.