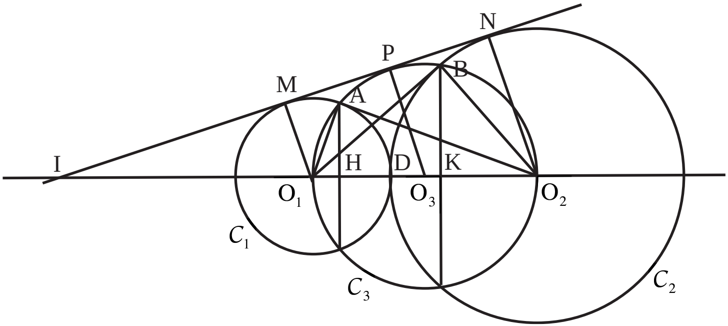
Solution de Robert Bourdon (Tourgeville)



Tangentes.

Soient r_1, r_2 et r_3 les rayons respectifs des cercles (C_1), (C_2) et (C_3), (AH) et (BK) les sécantes aux cercles, (MN) la tangente commune aux cercles (C_1) et (C_2), qui coupe la droite des centres en I.

Dans le triangle $\mathrm{INO_2}$, ($\mathrm{O_1M}$) est parallèle à ($\mathrm{O_2N}$). Menons ($\mathrm{O_3P}$) parallèle à ($\mathrm{O_1M}$) et ($\mathrm{O_2N}$), donc perpendiculaire à (MN).

$$\mathrm{O_3P} = \frac{\mathrm{O_1M} + \mathrm{O_2N}}{2} = \frac{r_1 + r_2}{2} = r_3 .$$

Donc P est sur (C_3) et (MN) est ainsi tangente à (C_3) en P.

Si on prend (MP) tangente à (C_1) et (C_3), le segment [$\mathrm{O_2N}$] perpendiculaire à (MP) sera tel que

$$\frac{\mathrm{O_2N} + r_1}{2} = r_3.$$

Donc $\mathrm{O_2N} = r_3$ et MP sera tangente à (C_1).

Flèches.

O_1AO_2 est un triangle rectangle donc $O_1A^2 = O_1H \times O_1O_2$;

ce qui s'écrit aussi $O_3P = \dfrac{r_1^2}{2r_3}$, d'où $HD = r_1 - \dfrac{r_1^2}{2r_3} = \dfrac{r_1(2r_3 - r_1)}{2r_3}$.

Or $2r_3 - r_1 = r_2$, donc $HD = \dfrac{r_1 r_2}{2r_3}$.

En procédant ensuite dans O_1BO_2 avec $O_1B_2 = O_2K \times O_2O_1$, on obtient de même $KD = \dfrac{r_1 r_2}{2r_3}$. Les flèches HD et KD sont bien égales.