Solution de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques) pour l'aire

Si le triangle ABC est direct, le point C est un point d'intersection du cercle, de centre P, de rayon 2, et du cercle image du cercle, de centre P, de rayon 6, par la rotation de centre A et d'angle $\pi/2$.

Deux triangles ABC sont possibles : pour l'un, le point P est intérieur au triangle et pour l'autre, il est extérieur.

Pour le calcul du côté a = AB = AC, on peut utiliser des méthodes élémentaires ou se servir de la relation entre les distances mutuelles de quatre points dans le plan, obtenue en écrivant la nullité du déterminant de Cayley-Menger (voir par exemple le beau livre de géométrie de Marcel Berger) :

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathrm{PA}^2 & \mathrm{PB}^2 & \mathrm{PC}^2 \\ 1 & \mathrm{AP}^2 & 0 & \mathrm{AB}^2 & \mathrm{AC}^2 \\ 1 & \mathrm{BP}^2 & \mathrm{BA}^2 & 0 & \mathrm{BC}^2 \\ 0 & \mathrm{CP}^2 & \mathrm{CA}^2 & \mathrm{CB}^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 16 & 36 & 4 \\ 1 & 16 & 0 & a^2 & a^2 \\ 1 & 36 & a^2 & 0 & 2a^2 \\ 0 & 4 & a^2 & 2a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -4a^2\left(a^4 - 40a^2 + 272\right).$$

On trouve : $a^2 = 20 \pm 8\sqrt{2}$.

La plus grande des solutions correspond au triangle qui admet P à l'intérieur. Son aire est égale à $10 + 4\sqrt{2}$.

Remarque sur le déterminant de Cayley-Menger.

Le déterminant de Cayley-Menger permet d'obtenir le volume d'un tétraèdre en fonction des longueurs des arêtes.

Si d_{ij} désigne la distance entre deux sommets du tétraèdre on a :

$$288\mathrm{V}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathrm{d}_{12}^2 & \mathrm{d}_{13}^2 & \mathrm{d}_{14}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{21}^2 & 0 & \mathrm{d}_{23}^2 & \mathrm{d}_{24}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{31}^2 & \mathrm{d}_{32}^2 & 0 & \mathrm{d}_{34}^2 \\ 0 & \mathrm{d}_{41}^2 & \mathrm{d}_{42}^2 & \mathrm{d}_{43}^2 & 0 \end{vmatrix}$$

Ce déterminant est nul si et seulement si les points sont coplanaires.

De façon plus générale, en dimension n, ce déterminant d'ordre $n + 2$ fournit le n-volume d'un $(n + 1)$-simplexe.

Attention : il faut multiplier par un coefficient qui dépend de n, puis prendre la racine carrée.

Par exemple si $n = 2$ il donne l'aire d'un triangle en fonction des longueurs des côtés, c'est-à-dire la formule de Héron.

$$-16\mathrm{S}^2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \mathrm{d}_{12}^2 & \mathrm{d}_{13}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{21}^2 & 0 & \mathrm{d}_{23}^2 \\ 1 & \mathrm{d}_{31}^2 & \mathrm{d}_{32}^2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & c^2 & b^2 \\ 1 & c^2 & 0 & a^1 \\ 1 & b^2 & a^2 & 0 \end{vmatrix}$$

avec les notations habituelles AB = c, BC = a et CA = b.