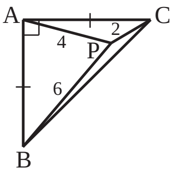
Solution de Jérôme Esquerré (Ramonville-Saint-Agne) pour la construction

Analyse :



Supposons qu'il existe deux points B et C tels que ABC soit rectangle isocèle en A, BP = 6 et CP = 2. B et C appartiennent alors respectivement au cercle $\mathcal{C}$ de centre P, de rayon 6 cm et au cercle γ de centre P de rayon 2 cm.

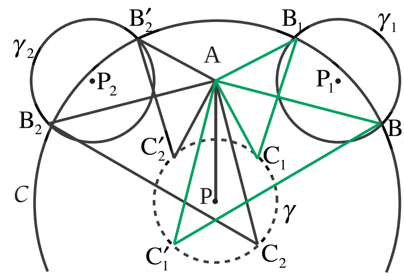
De plus, ABC étant rectangle isocèle en A, B est l'image de C soit par le quart de tour direct r_1 de centre A soit par le quart de tour indirect r_2 de centre A.

$C \in \gamma$, donc le point $B = r_1(C)$ appartient au cercle $\gamma_1 = r_1(\gamma)$ de centre $P_1 = r_1(P)$ et de rayon 2 cm. De même, le point $B = r_2(C)$ appartient au cercle $\gamma_2 = r_2(\gamma)$ de centre $P_2 = r_2(P)$ et de rayon 2 cm.

Ainsi, $B \in \mathcal{C} \cap \gamma_1$ ou $B \in \mathcal{C} \cap \gamma_2$.

Synthèse et construction :

Construisons d'abord les points P_1 et P_2 images respectives de P par le quart de tour direct r_1 de centre A et par le quart de tour indirect r_2 de centre A. On trace alors le cercle γ_1 de centre P_1 et de rayon 2 cm, le cercle γ_2 de centre P_2 et de rayon 2 cm, puis le cercle C de centre P et de rayon 6 cm. D'après le théorème de Pythagore appliqué aux triangles APP_1 et APP_2 rectangles isocèles en A avec AP = 4, on obtient :



$$PP_1 = PP_2 = 4\sqrt{2}.$$

Ainsi, $4 < PP_1 < 8$, donc C et γ_1 sont sécants en deux points B_1 et B'_1.

De même, $4 < PP_2 < 8$, donc C et γ_1 sont sécants en deux points B_2 et B'_2. On construit alors $C_1 = r_2(B_1)$, $C'_1 = r_2(B'_1)$, $C_2 = r_1(B_2)$, $C'_2 = r_1(B'_1)$.

Par définition de r_2, le triangle AB_1C_1 est rectangle et isocèle en A avec $PB_1 = 6$ (car $B_1 \in C$).

De plus, $[PC_1]$ est l'image de $[P_1B_1]$ par r_2 donc $PC_1 = P_1B1$. Or $B_1 \in \gamma_1$ donc $P_1B_1 = 2$. Dès lors, $PC_1 = 2$.

Le triangle AB_1C_1 est donc une solution au problème posé.

On obtient de la même façon que les triangles $AB'_1C'_1$, AB_2C_2 et $AB'_2C'_2$ sont aussi des solutions du problème.

Le problème posé admet exactement quatre solutions.

Remarque : Si l'on ne tient pas compte de la symétrie par rapport à (AP), ce problème admet deux triangles solutions non isométriques : par exemple AB_1C_1 et $AB'_1C'_1$.

En démontrant que P, P_1, C_1 et C'_1 appartiennent à la médiatrice de $[B_1B'_1]$, on peut prouver que P est extérieur au triangle AB_1C_1 et que P est intérieur au triangle $AB'_1C'_1$.

Il est aussi possible de déterminer les dimensions des deux triangles non isométriques :

lorsque P est extérieur à ABC, on a $BC = 2\sqrt{10 - 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 - 2\sqrt{2}}$,

lorsque P est intérieur à ABC, $BC = 2\sqrt{10 + 4\sqrt{2}}$ et $AB = 2\sqrt{5 + 2\sqrt{2}}$.