Exercice 489-2

I . Énoncé

Prouver que chaque nombre de la suite 49 ; 4 489 ; 444 889 ; 44 448 889 ; … est un carré parfait (dans chaque nombre, il y a n quatre, $n-1$ huit et un neuf).

II . Résolution

1 . Notation

Pour tout entier naturel n, soit u_n le nombre dont les chiffres en base 10 sont de gauche à droite $(n+1)$ quatre, n huit et un neuf.

2 . Démonstration

Le produit de u_n par 9 est obtenu en posant la multiplication en colonnes :

$$\begin{array}{rr} & \overbrace{4\,4\,4\,\ldots\,4\,4}^{n+1\text{ chiffres}}\overbrace{8\,8\,\ldots\,8\,8}^{n\text{ chiffres}}9 \\ \times & 9 \\ \hline & 4\underbrace{0\,0\,0\,\ldots\,0}_{n\text{ zéros}}4\underbrace{0\,0\,\ldots\,0\,0}_{n\text{ zéros}}1 \end{array}$$

> $9 \times 9 = 81$, on pose 1 et on retient 8.
>
> Pour le premier huit, $9 \times 8 = 72$; $72 + 8 = 80$, on pose 0 et on retient 8. Il en est de même pour tous les huit puisque la retenue est 8 à chaque rang. Il s'ensuit que le résultat comporte autant de zéros qu'il y a de 8 au multiplicande.
>
> Pour le premier quatre, $9 \times 4 = 36$; $36 + 8 = 44$, on pose 4 et on retient 4.
>
> Pour les autres quatre, la retenue est de 4, donc le résultat est $36 + 4 = 40$ pour lequel on pose 0 et on retient 4 à l'exception du dernier quatre pour lequel on pose 40. Il s'ensuit ici que le résultat comporte un zéro de moins qu'il n'y a de quatre au multiplicande.

Les chiffres du nombre $9u_n$ sont donc de gauche à droite : quatre suivi de n zéros, quatre suivi de n zéros et un.

Par conséquent,
$$\begin{aligned} 9u_n &= 4 \times 10^{2n+2} + 4 \times 10^{n+1} + 1 \\ &= 4 \times 10^{2n+2} + 2 \times 2 \times 10^{n+1} + 1 \\ &= (2 \times 10^{n+1})^2 + 2 \times (2 \times 10^{n+1}) + 1 \\ &= (2 \times 10^{n+1} + 1)^2. \end{aligned}$$

On en tire $u_n = \frac{1}{9}(2 \times 10^{n+1} + 1)^2 = \left(\frac{2 \times 10^{n+1} + 1}{3}\right)^2$ ce qui prouve que u_n est un carré.

Pour qui aurait des doutes, le membre de droite est un entier naturel puisque la somme des chiffres de $2 \times 10^{n+1} + 1$ vaut 3.

III . Heuristique

À la lecture de l'énoncé, je me suis évidemment tourné vers ma vieille calculatrice, juste pour voir, et ai pu constater que les nombres donnés sont les carrés respectifs de 7 ; 67 ; 667 ; 6 667 ;… et là je me dis : « Tiens, voilà $\frac{2}{3}$ ». D'où l'idée d'écrire le nombre $\alpha_n = 66\ldots67$, constitué de gauche à droite de n six et un sept, sous la forme $\alpha_n = 0,66\ldots67 \times 10^{n+1}$ puis de corriger pour avoir $\frac{2}{3}$:

$\alpha_n = \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times 10^{-n-1}\right) \times 10^{n+1}$ soit $\alpha_n = \frac{2 \times 10^{n+1}}{3} + \frac{1}{3}$ ou $\alpha_n = \frac{2 \times 10^{n+1} + 1}{3}$.

Il en découle l'idée de multiplier les nombres de l'énoncé par 9 puis de vérifier qu'ils sont les carrés de $2 \times 10^{n+1} + 1$.