ÇA TOMBE JUSTE

"x désignant un angle compris au sens large entre 0° et 90°,
trouvez sin(x) sachant que cos(x)=..."
Quelles valeurs décimales peut-on donner à cos(x) pour que la réponse à cet exercice soit aussi un nombre décimal?

La restriction des valeurs pour l'angle permettra de nous limiter aux valeurs positives pour cos(x). Aussi, dans un premier temps, nous pouvons proposer la formulation du problème suivante:

Avec $\{\sin(x);\cos(x)\} = \{\alpha ; \beta\}$

I

Trouver toutes les paires $\{\alpha ; \beta\} \subset D^{+} \mid \alpha^2 + \beta^2 = 1$

Chercher des paires plutôt que des couples ne supprime pas de solutions au problème initial puisque, α et β étant décimaux, il n'y a pas de solutions où α = β.

Nous connaissons tous, la solution {0.6; 0.8} de ce problème.

Remarquons que dans une solution , les zéros inutiles étant supprimés,les nombres α et β ont exactement le même nombres de chiffres après la virgule. Nous appellerons solution d'ordre n une solution où α et β ont "n" chiffres après la virgule.

Au passage, dans ce travail sera démontrée la propriété inattendue suivante:
"Quelque soit le nombre entier "n", il existe une seule paire de nombres décimaux positifs ayant n chiffres après la virgule dont la somme des carrés est égale à 1"
Ces nombres seront aussi les 2 seules valeurs décimales d'ordre n de cos(x) satisfaisant à la condition imposée.
De plus, nous découvrirons une méthode pour calculer ces nombres.

Nous pouvons maintenant formuler notre problème d'une 2ème manière:

En posant : $\alpha = A.10^{-n}$ et $\beta = B.10^{-n}$,

II

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Trouver toutes les paires $\{A ; B\} \subset \mathbb{N} - 10\mathbb{N} \mid A^2 + B^2 = (10^n)^2$

Dans cette nouvelle formulation , ({ A; B } est une solution) ssi ((A; B; 10^n) est un triplet pythagoricien).
Avant de poursuivre, rappelons à ce sujet, quelques définitions et propriétés:

TRIPLET PYTHAGORICIEN

<u>Définitions</u> :1) (A,B,C) est un triplet pythagoricien $\Leftrightarrow$ ((A,B,C)$\in$ $N^2 x N^*$ et, $A^2+B^2= C^2$)
2) (a,b,c) est un triplet pythagoricien premier $\Leftrightarrow$ ((a,b,c) est un triplet pythagoricien et pgcd(a,b,c) = 1)

<u>Propriétés</u> : 1) $\forall$ k $\in$ N^*, ((A,B,C) est un triplet pythagoricien) $\Leftrightarrow$ (kA,kB,kC) est un triplet pythagoricien)
2)((A,B,C) est un triplet pythagoricien) $\Rightarrow$ (pgcd(A,B) = pgcd(A,C) = pgcd(B,C))
3) ((a,b,c) est un triplet pythagoricien premier) $\Rightarrow$ (c est impair.)
4) On trouve tous les triplets pythagoriciens premiers, sans répétition, en choisissant de toutes les manières possibles 2 nombres entiers p et q, premiers entre eux, p impair et en posant : c = $p^2+(2q)^2$ et, { a,b } = { $|p^2-(2q)^2|$, 4pq }.

Remarquons que la propriété 4) affirme en particulier que si un nombre « c » impair est décomposable en une somme de 2 carrés (de nombres premiers entre-eux), alors il en est de même pour « c^2 ».Nous utiliserons cette remarque un peu plus loin.

Revenons pour l'instant à la formulation II de notre problème et remarquons que le triplet pythagoricien (A;B;10^n) n'est pas premier: la propriété 3) ci-dessus permet de l'affirmer.
Le pgcd des 3 termes est forcément 2^n : En effet, le triplet pythagoricien (A;B;10^n) devra être simplifié par 2^n pour rendre le 3ème terme impair. A et B sont donc multiples de 2^n; si ils étaient aussi multiples de 5,ils seraient multiples de10 ce qui est exclu. Dans ces conditions, la propriété 1) permet de le simplifier et on peut en déduire une 3ème formulation de notre problème:

En posant : $A = a.2^n$ et $B = b.2^n$,

III	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Trouver toutes les paires $\{a ; b\} \subset \mathbb{N} - 5\mathbb{N} \mid a^2+ b^2 = (5^n)^2$

Utilisant enfin la propriété 4) ,on écrira une 4ème formulation du problème:

En posant : $\{ a , b \} = \{ | p^2 - (2q)^2 | ;\ 4pq \}$,

IV	Pour tout $n \in \mathbb{N}$, Trouver tous les couples $(p , q) \in \mathbb{N} * \mathbb{N}$ vérifiant: - p impair, - $\{ p ,q \} \not\subset 5\mathbb{N}$ - $p^2+ (2q)^2 = 5^n$

Dans cette formulation, la condition:" $\{ p, q \} \not\subset 5\mathbb{N}$ *"qui remplace la condition"* $\{a ; b\} \subset \mathbb{N} - 5\mathbb{N}$ *" de la formulation III semble ne pas lui être équivalente, cependant elle est suffisante car la dernière condition "(p2 + (2q)^2 =5^n)" étant réalisée ou bien p et q sont tous 2 multiples de 5 ou bien ils ne le sont ni l'un ni l'autre.*

On est donc ramené à prouver, pour tout n, l'existence et l'unicité d'une solution de rang n à l'un des problème I, II, III ou IV; existence et unicité qui se transmettront aux autres. Voici le début d'un tableau dans lequel nous pourrons écrire des solutions à mesure de leur découverte.

$\{a,b\}=\{ |p^2-(2q)^2| , 4pq \}$; $\{ \alpha_n , \beta_n \} = \{ \frac{a_n}{5^n} ; \frac{b_n}{5^n} \}$

n	(p , q) [$p^2+(2q)^2=5^n$]	{ a , b } [$a^2 + b^2 = (5^n)^2$]	{ α , β } [$\alpha^2 + \beta^2 = 1$]	Cos(x)
0				0 1
1			{ 0.6 , 0.8 }	0.6 0.8
2				

Utilisons d'abord, comme annoncé, la remarque relative à la propriété 4) du triplet pythagoricien pour découvrir quelques solutions:
Partant, à l'ordre 1, de la solution connue: { α, β } = {0,6; 0,8}, on retrouve facilement qu'elle est associée à la solution du problème III: {a; b} = {3; 4}. Et, en appliquant la dite remarque, on trouve une solution à lordre 2 du problème IV:
(p, q) = (3,2) car: $3^2 + (2x2)^2 = 5^2$ *; plus généralement, une solution d'ordre n du problème III permet de calculer une solution d'ordre 2n du problème IV selon une formule que nous inscrivons dans notre tableau ainsi que quelques résultats qui s'en déduisent.*

$\{a,b\}=\{ |p^2-(2q)^2| , 4pq \}$; $\{ \alpha_n , \beta_n \} = \{ \frac{a_n}{5^n} ; \frac{b_n}{5^n} \}$

p_{2n} = l'impair de $\{ a_n ; b_n \}$; q_{2n} = ½ du pair de $\{ a_n ; b_n \}$

n	(p , q) [$p^2+(2q)^2=5^n$]	{ a , b } [$a^2 + b^2 = (5^n)^2$]	{ α , β } [$\alpha^2 + \beta^2 = 1$]	Cos(x)
0				0 1
1		{ 3 , 4 }	{ 0.6 ; 0.8 }	0.6 0.8
2	(3; 2)	{ 7; 24 }	{0.28; 0.96 }	0.28 0.96
3				
4	(7 ; 12)	....	....	....

Cette remarque permettra des "raccourcis" mais ne donne pas de solutions à tous les ordres ni ne prouve l'unicité annoncée.

Pour commencer l'étude du cas général, nous établirons 2 lemmes:

Lemme 1 : Quels que soient les nombres entiers p et q, les nombres (p+4q) et (p-q) sont soit tous les 2 multiples de 5 soit ni l'un ni l'autre.
Il en est de même pour (p-4q) et (p+q).

En effet: comme $4 \equiv -1$ *modulo 5, il s'en suit:* $p+4q \equiv p-q$ *modulo 5.*

Lemme 2: Quels que soient les entiers p et q premiers avec 5, et $n \geq 1$

$$(p^2+(2q)^2=5^n) \Rightarrow (1\, et\, 1\, seul\, des\, 2\, nombres\, (p+q)\, ou\, (p-q)\, est\, multiple\, de\, 5)$$

Démonstration:
Partant de l'hypothèse: $p^2+(2q)^2=5^n$, *et* $n \geq 1$
on peut en déduire: $p^2+(2q)^2 \equiv 0$ *modulo 5*
ce qui peut s'écrire: $p^2 - q^2 \equiv 0$ *modulo 5*
ou encore: $(p+q)(p-q) \equiv 0$ *modulo 5*
ce qui équivaut à: $((p+q \equiv 0)$ *ou* $(p-q) \equiv 0)$ *car 5 est premier.*

D'autre part, on ne pourra avoir : $(p+q) \equiv 0)$ *et* $(p-q \equiv 0)$
Car, on aurait alors: $p+q \equiv p-q$
ce qui entraînerait $2q \equiv 0$
et finalement: $q \equiv 0$ *modulo 5 ce qui est contraire à l'hypothèse du lemme:"q premier avec 5".*

Nous pouvons maintenant, démontrer l'existence de solutions au problème IV pour tout entier $n \geq 1$
Nous allons bien sûr raisonner par récurrence.
A l'ordre 1, on a la solution du problème III: $\{a, b\} = \{3; 4\}$ *ce qui donne, en résolvant un système, pour le problème IV :* $(p; q) = (1;1)$.

Supposons que le problème IV a une solution (p; q) à l'ordre $n \geq 1$,
On a alors en particulier: $p^2+(2q)^2 = 5^n$ *ou*
$p^2+4q^2 = 5^n$ *et, en multipliant à droite par 5 et à gauche par:(4+1),*
on obtient: $4p^2+16q^2+p^2+4q^2=5^{n+1}$
Or cette égalité peut s'écrire: $(p+4q)^2+(2|p-q|)^2 =5^{n+1}$
ou encore: $|p-4q|^2 +(2(p+q))^2 = 5^{n+1}$.
Ces égalités qui ont la forme exigée dans le problème IV suggèrent 2 solutions possibles à ce problème au rang n+1: $(P; Q)= (p+4q;|p-q|)$ *ou* $(P;Q)=(|p-4q| ; p+q)$.
Ces solutions seront valables si les autres conditions sont satisfaites:

- *D'abord "P" doit être impair: c'est vérifié dans les 2 cas car "p" étant lui-même impair, "p+4q" et "p-4q" le sont aussi.*
- *On doit aussi avoir:* $\{ P;Q \} \not\subset 5\mathbb{N}$ *: - Or, d'après le lemme1, on sait que dans les 2 cas, les 2 coordonnées du couple (P;Q) sont soit toutes 2 multiples de 5 soit ni l'une ni l'autre.*
  - Et,l'hypothèse "$p^2+(2q)^2= 5^n$*" étant vérifiée, on déduit du lemme 2 que une et une seule des 2èmes coordonnées " p+q" ou " p-q" est multiple de 5. Le couple dont la 2ème coordonnée est multiple de 5 a sa 1ère qui l'est aussi et ne peut donc être une solution de notre problème. Mais l'autre couple respecte la condition.*

Donc, parmi les 2 couples $(p+4q;|p-q|)$ *et* $(|p-4q|;p+q)$, *un et un seul est solution du problème IV au rang n+1.*
On peut donc affirmer que: quelque soit $n \geq 1$, *le problème IV a au moins une solution et notre procédé permet de n'en calculer qu'une seule.*

Inscrivons ce procédé dans notre tableau ainsi que quelques solutions qui s'en déduisent.Au passage, nous remarquerons que les solutions déjà trouvées aux rangs 2 et 4 se retrouvent par ce procédé.

$\{a,b\}=\{ |p^2-(2q)^2| , 4pq \}$; $\{ \alpha_n , \beta_n \} = \{ \frac{a_n}{5^n} ; \frac{b_n}{5^n} \}$; p_{2n}= l'impair de $\{ a_n ; b_n \}$; q_{2n} = ½ du pair de $\{ a_n ; b_n \}$

si $p_n-q_n \notin 5\mathbb{N}$,alors $(p_{n+1},q_{n+1}) = (p_n+4q_n, |p_n-q_n|)$; si $p_n-q_n \in 5\mathbb{N}$, alors $(p_{n+1},q_{n+1}) = (|p_n-4q_n|, p_n+q_n)$

n	(p; q) [$p^2+(2q)^2=5^n$]	{ a , b } [$a^2+b^2=(5^n)^2$]	{ α , β } [$\alpha^2+\beta^2=1$]	Cos(x)
0				0 1
1	(1; 1)	{ 3: 4 }	{ 0.6; 0.8 }	0.6 0.8
2	(3; 2)	{ 7; 24 }	{ 0.28; 0.96 }	0.28 0.96
3	(11; 1)	{ 117; 44 }	{ 0.936; 0.352 }	0.936 0.352
4	(7; 12)	....	....	....
5	(41; 19)			
6				

Il nous reste à démontrer l'unicité annoncée ce qui revient à démontrer , pour tout n de $\mathbb{N}$ *l'unicité de la solution du problème IV au rang n.*
Commençons par déterminer les solutions des différents problèmes au rang 0. La résolution (facile) de système à 2 inconnues donne les solutions uniques:
$\{\alpha_0;\beta_0\} = \{a_0;b_0\} = \{1;0\}$; $(p_0;q_0) = (1;0)$
Et, on constate que le procédé permettant de calculer $(p_{n+1}; q_{n+1})$ *à partir de* $(p_n;q_n)$ *pour* $n \geq 1$ *convient aussi pour n=o.*
Dans ces conditions, définissons les objets mathématiques suivants:

- $(S_n)_n$ *: suite des solutions* $s_n = (p_n; q_n)$ *définie par* $s_0 = (1;0)$ *et le procédé ci-dessus.*
- S*: l'ensemble de toutes les solutions du problème IV.*
- Φ*: application de* S *dans* S *telle que si* $p-q \notin 5\mathbb{N}$ *alors* $\Phi(p,q) = (p+4q; |p-q|)$
  si $p-q \in 5\mathbb{N}$ *alors* $\Phi(p,q) = (|p-4q|; p+q)$

En fait, Φ *généralise le procédé précédent et, d'après la démonstration ci-dessus, si (p;q) de* S *est d'ordre n alors,* $\Phi(p;q)$ *est d'ordre n+1. En particulier* $\Phi(s_n) = s_{n+1}$

- *f: application de* $\mathbb{R}^2$ *dans* $\mathbb{R}_+$ *telle que:* $f(p;q)= p^2+4q^2$.

La dernière condition du problème IV s'écrit alors: $f(p;q) = 5^n$.

− *Pour i ∈ {1;2;3;4}, les applications φ_i de ℝ ² dans ℝ ² définies ci-après:*

i	1	2	3	4
$\varphi_i\begin{pmatrix}p\\q\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}p+4q\\p-q\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}p+4q\\-p+q\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}p-4q\\p+q\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}-p+4q\\p+q\end{pmatrix}$

En quelque sorte, les applications φ_i sont "derrière" Φ: précisément,pour tout (p;q) de S, il existe un seul i ∈ {1;2;3;4} tel que:Φ(p;q)= φ_i(p;q).
Par ailleurs, les φ_i sont des isomorphismes d'espaces vectoriels (chacune a pour déterminant 5 ou -5); leurs réciproques sont définies ci-après:

i	1	2	3	4
$\varphi_i^{-1}\begin{pmatrix}P\\Q\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{P+4Q}{5}\\\frac{P-Q}{5}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{P-4Q}{5}\\\frac{P+Q}{5}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{P+4Q}{5}\\\frac{-P+Q}{5}\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}\frac{-P+4Q}{5}\\\frac{P+Q}{5}\end{pmatrix}$

Il est aussi utile de remarquer que, pour tout i, et tout (p;q) de S, $f\circ\varphi_i(p;q)=5\text{x}f(p;q)$
et que $f\circ\varphi_i^{-1}(P;Q)= (1/5)\text{x}f(P;Q)$.
pour ce dernier point, on a en effet: $f(P;Q)=f\circ\varphi_i\circ\varphi_i^{-1}(P;Q)=5\text{x}f\circ\varphi_i^{-1}(P;Q)$

Muni de ces instruments,on va démontrer par récurrence, pour tout n, l'unicité de la solution de rang n au problème IV.

On a démontré que, quel que soit n, le problème IV a au moins une solution de rang n.
On sait que pour n=o et n=1, cette solution est unique.
Supposons cette unicité vraie jusqu'à un rang $n\geq 1$; il s'agit alors de la solution $s_n=(p_n;q_n)$.
Et considérons (P;Q) une solution de rang n+1.
Dans une première étape, on va démontrer que (P;Q) est l'image par l'un des φ_i d'un élément de S:

Quelque soit i ∈ {1;2;3;4}, (P;Q) a un antécédent par φ_i : $\varphi_i^{-1}(P;Q)$.
Pour l'un de ces "i", $\varphi_i^{-1}(P;Q)$ est-il élément de S ?
Autrement dit, existe-t-il i pour lequel $\varphi_i^{-1}(P;Q)$ vérifie les critères du problème IV?

Tout d'abord: existe-t-il "i" pour lequel $\varphi_i^{-1}(P;Q)$ est élément de ℕ x ℕ ?
C'est à dire: existe-t-il "i" pour lequel les coordonnées de $\varphi_i^{-1}(P;Q)$ sont à la fois positives et entières?
− *En ce qui concerne la positivité, on observe que $\varphi_1^{-1}(P;Q)$ et $\varphi_3^{-1}(P;Q)$ ont la même première coordonnée positive et que leurs deuxièmes coordonnées sont opposées: donc, un seul de ces 2 couples a ses 2 coordonnées positives; ce couple s'écrit: "$\left((P+4Q)/5 ;\left|P-Q\right|/5\right)$"*
De même,un seul des 2 couples $\varphi_2^{-1}(P;Q)$ et $\varphi_4^{-1}(P;Q)$ a ses 2 coordnnées positives et s'écrit: "$\left(\left|P-4Q\right|/5;(P+Q)/5\right)$"
− *2ème point: les coordonnées de ces couples sont-elles des nombres entiers?*
Les coordonnées de ces couples se présentent comme des fractions de dénominateur 5. Il s'agit donc de savoir si les numérateurs sont multiples de 5.Or, l'hypothèse de récurrence: "$P^2+4Q^2=5^{n+1}$" et le lemme2, permettent de conclure qu'un seul des 2 nombres "P+Q" et "P-Q" est multiple de 5 donc, un seul des 2 couples jusqu'ici retenus a sa 2ème coordonnée entière. Et pour ce couple-là, la première coordonnée est aussi entière d'après le lemme 1. Appelons "(p;q)" ce couple.
(p;q) est donc le seul couple de $\{\varphi_1^{-1}(P;Q); \varphi_2^{-1}(P;Q); \varphi_3^{-1}(P;Q): \varphi_4^{-1}(P;Q)\}$dont les coordonnées sont à la fois entières et positives.

Vérifions maintenant le 1er critère: la première coordonnée de (p;q) doit être impaire.
On a: $p=(P+4Q)/5$ ou $p=|P-4Q|/5$; chacun de ces quotients a son numérateur impair puisque P est impair . Celui des 2 qui est entier est aussi impair.
Donc, le 1er critère est bien vérifié par le couple (p;q).

Passons au 2ème critère: la paire {p, q} ne doit pas être une partie de $5\mathbb{N}$.
Observons que (P;Q) étant l'image par l'un des φ_i de (p;q),"P" et"Q" sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de "p" et "q".
Dans ces conditions, si "p" et "q" étaient multiples de 5, "P" et "Q" le seraient aussi, ce qui est contraire à l'hypothèse de récurrence.
Le couple (p;q) vérifie bien ce 2ème critére

Il nous reste à vérifier le 3ème et dernier critère: A-ton $f(p;q)) = 5^n$?
Selon l'hypothèse de récurrence, $f(P;Q) =5^{n+1}$,
et on sait que: $f\circ\varphi_i^{-1}(P;Q) = (1/5)\times f(P;Q)$, quel que soit i.
On a donc en particulier $f(p;q)=5^n$
Le dernier critère est donc vérifié; de plus on voit que (p;q) est une solution de rang n du problème IV; c'est donc s_n.

Il existe donc un "i" (unique) pour lequel $\varphi_i^{-1}(P;Q)= s_n$ c.à.d pour lequel: $(P;Q)= \varphi_i (s_n)$ autrement dit $(P;Q)= \Phi(s_n) = s_{n+1}$, et la solution de rang n+1 au problème IV est unique.
Le problème IV a donc, quelque soit n une solution unique de rang n; ainsi donc que les problèmes III, II et I et les valeurs correspondantes pour cos(x) sont exactement au nombre de 2.
Nous pouvons continuer notre tableau aussi loin que nous voulons.

$\{a,b\}=\{\,|p^2-(2q)^2|\,,4pq\,\}$; $\{\alpha_n,\beta_n\} = \{\,\frac{a_n}{5^n}\,;\,\frac{b_n}{5^n}\,\}$ p2n = l'impair de { an ; bn }; q2n = ½ du pair de { a_n ; bn }

si $p_n-q_n \notin 5\mathbb{N}$, alors $(p_{n+1},q_{n+1}) = (p_n+4q_n, |p_n-q_n|)$ si $p_n-q_n \in 5\mathbb{N}$, alors $(p_{n+1},q_{n+1}) = (|p_n-4q_n|, p_n+q_n)$

n	(p , q) [$p^2+(2q)^2=5^n$]	{ a , b } [$a^2+b^2=(5^n)^2$]	{ α , β } [$\alpha^2+\beta^2=1$]	Cos(x)
0	(1; 0)	{ 1; 0 }	{ 1; 0 }	0 1
1	(1 ; 1)	{ 3; 4 }	{ 0.6; 0.8 }	0.6 0.8
2	(3; 2)	{ 7; 24 }	{ 0.28; 0.96 }	0.28 0.96
3	(11; 1)	{ 117; 44 }	{ 0.936; 0.352 }	0.936 0.352
4	(7 ; 12)	{ 527; 336 }	{ 0.8432; 0.5376 }	0.8432 0.5376
5	(41; 19)	{237; 3116 }		
10	(237; 1558)			
11	(6469; 1321)			