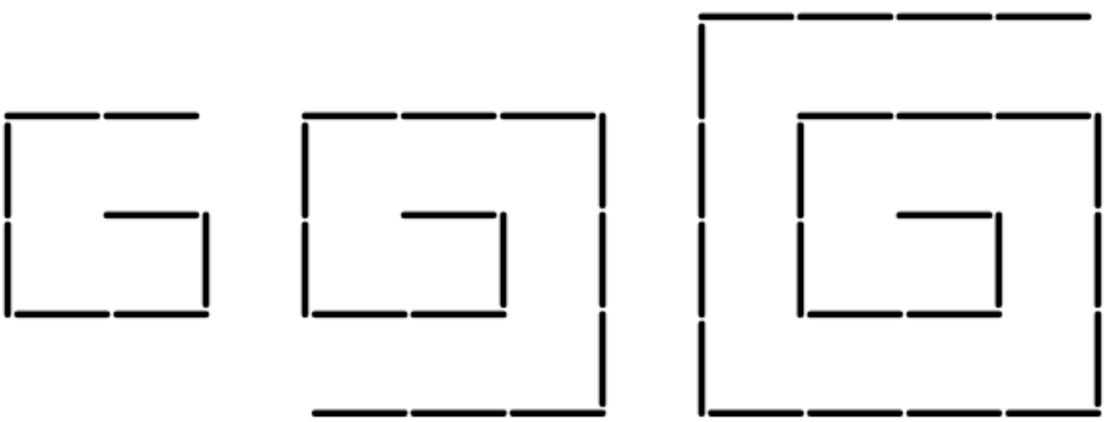
	Titre	*Niveaux*								*Origine*	*Thème*
1	La spirale des cure-dents (I)	**3**	**4**							LU	Somme des cinq premiers termes de la suite 8, 15, 24, …
2	Les plates-bandes de l'école	**3**	**4**							RZ	Comparer les périmètres de quatre figures équivalentes dessinées sur un quadrillage
3	Parcours de nombres	**3**	**4**	**5**						UD	Suites arithmétiques à compléter par additions lacunaires
4	Nombres cachés	**3**	**4**	**5**						RV	Compléter un produit de trois nombres naturels égal à 80 dont un des facteurs est 5
5	Des enfants … bien salés !	**3**	**4**	**5**						RMG	Trouver les nombres dont la moitié est 3×4 ou $3 \times 4 + 1$ ou $3 \times 4 + 2$
6	Feuilles de papier		**4**	**5**	**6**					UD	Pavage à compléter sur quadrillage par des polygones isométriques de 12 côtés.
7	Chocolat en scène			**5**	**6**					LY	Échanges : trouver n et m tels que $n - 1 = m + 1$ et $n + 1 = 2\ (n - 1)$
8	L'habit de poupée			**5**	**6**					PR	Décomposition additive de 66 en 4 termes selon quelques relations entre ces termes
9	Modèles réduits			**5**	**6**	**7**				GTCP	Décomposer 96 en une somme de quatre nombres proportionnels à 1, 2, 3 et 6.
10	Le Tangram du menuisier (I)				**6**	**7**				GTGP	Calculer la mesure du côté d'un Tangram en fonction de celle du petiti carré interne (6 cm)
11	Comme vous avez de grandes jambes … (I)				**6**	**7**	**8**			MI	Comparaison de la durée d'un déplacement sur un parcours selon deux vitesses différentes
12	Égalité à compléter				**6**	**7**	**8**			RV	Égalités de type $a \times 90 \times b = 1620$ à compléter par des nombres décimaux particuliers
13	La meilleure pâtissière					**7**	**8**			GTAL	Système d'équations dans N : $a = c + 2 = 2b$ et $a + 4 = 2c$
14	La fête des châtaignes					**7**	**8**	**9**	**10**	SI	Logique : reconstruction de relations entre personages, jours et quantités
15	Une cure de vitamines					**7**	**8**	**9**	**10**	PU	Répartition de 35 proportionnellement à 1 ; 3/4 ; 1/2 et 1/4
16	À trois, c'est plus vite fait						**8**	**9**	**10**	RV	Durée d'une tâche effectuée par trois acteurs connaissant la durée mise par chacun lorsqu'il effectue la tâche seul
17	Le Tangram du menuisier (II)						**8**	**9**	**10**	GTGP	Calculer la mesure du côté d'un Tangram en fonction de celle du petit carré interne (u)
18	Comme vous avez de grandes jambes … (II)							**9**	**10**	MI	Comparaison des durée d'un déplacement sur un parcours selon deux vitesses et calcul de la longueur restant à parcourir
19	La spirale des cure-dents (II)							**9**	**10**	LU	Calcul du terme de rang 50 de la suite 3, 8, 15, 24, 35 ...
20	Beaucoup de zéros							**9**	**10**	PR	Recherche du plus petit produit de nombres naturels différents, de 1 à 30, qui se termine par le plus grand nombre possible de zéros

1. LA SPIRALE DES CURE-DENTS (I) (Cat.3, 4)

Guy s'est amusé à construire des spirales de plus en plus grandes avec des cure-dents.

Sur l'image, vous voyez ses trois premières spirales.



En continuant ainsi il est arrivé à construire cinq spirales.

Combien de cure-dents a-t-il utilisés pour construire toutes ses cinq spirales ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la somme des cinq premiers termes d'une suite de nombres dont on connaît les trois premiers 8, 15, 24, … (déterminés à partir du dénombrement de cure-dents disposés en spirales)

Analyse de la tâche

- Observer les trois spirales données et leurs régularités : par exemple, elles sont inscrites dans des carrés de 2 × 2, 3 × 3, 4 × 4, le « début » de chaque spirale est un cure-dent placé horizontalement, les côtés suivants sont de 2 cure-dents, etc.) et comprendre qu'il faudra construire la quatrième, la cinquième et la sixième spirale en conservant les mêmes règles de construction.
- Construire la quatrième spirale dont les côtés successifs doivent être de longueurs 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, puis 5 (un de plus que sur le dernier côté de la troisième), 5. Puis construire la cinquième selon les mêmes régularités par rapport à la précédente.
- Compter les cure-dents des trois premières (8, 15, 24) puis des suivantes (35, 48).
- Calculer la somme des cure-dents : 8 + 15 + 24 + 35 + 48 = 130.

Ou Se rendre compte, pour vérifier les comptages, de la régularité de la suite des nombres de cure-dents (8 ; 15 ; 24 ; 35 ; 48) où les différences entre un terme et le suivant sont les nombres impairs successifs à partir de 7 (7 ; 9 ; 11 ; 13 ; 15).

Attribution des points

4 Réponse correcte (130 cure-dents) avec les spirales correctement dessinées et /ou le détail des comptages et calculs

3 Réponse correcte avec dessins peu précis ou calculs et comptages incomplets

ou une erreur dans le dessin d'une seule spirale entraînant une erreur dans les cure-dents avec réponse cohérente pour la somme des cure-dents, avec le détail des calculs

ou détail des comptages complets mais la réponse (130) manque

2 Deux erreurs dans le dessin des spirales entraînant deux erreurs dans le dénombrement des cure-dents avec réponse cohérente pour la somme des cure-dents, avec le détail des calculs

ou dessin correct des deux spirales qui manquent, sans donner la réponse

ou réponse correcte (130) sans explications

ou réponse « 83 cure-dents » parce que ceux des trois spirales déjà dessinées ne sont pas pris en considération, avec détail des comptages et calculs ou dessin correct des spirales.

1 Début de recherche cohérent (par exemple la quatrième spirale correcte)

ou réponse erronée en raison de plus de deux erreurs de comptage ou de calcul

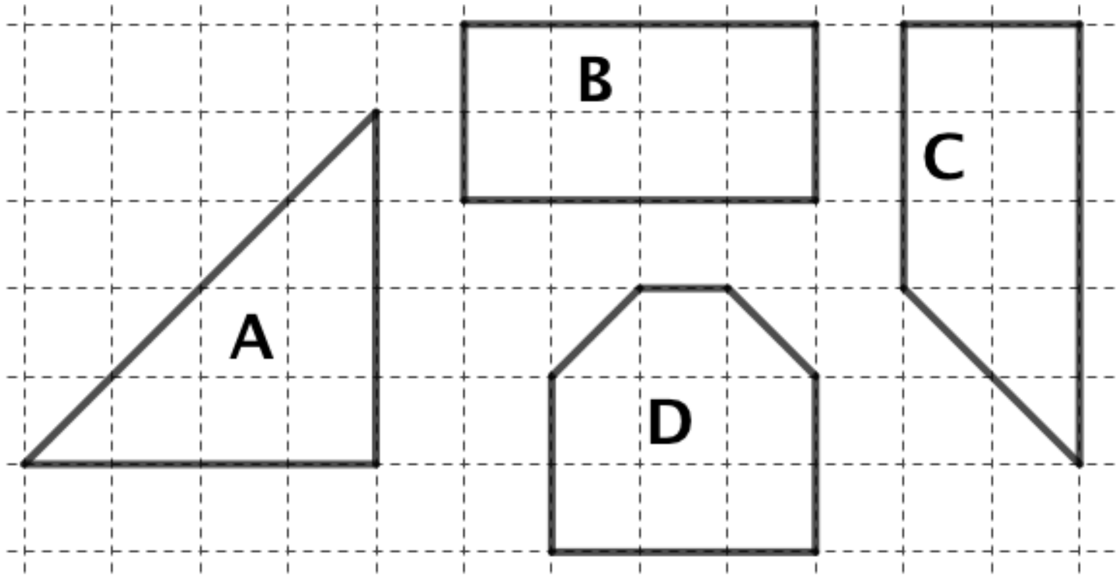
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Luxembourg

2. LES PLATES-BANDES DE L'ÉCOLE (Cat. 3, 4)

Les figures que vous voyez ci-dessous représentent les quatre plates-bandes de fleurs qui se trouvent dans le jardin de l'école.



Le jardinier veut les entourer d'une barrière métallique pour que les enfants ne marchent pas sur les fleurs.

Quelle plate-bande aura la barrière la plus longue ?

Quelle plate-bande aura la barrière la plus courte ?

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les périmètres de quatre polygones de même aire, dessinés sur une grille, dont les côtés suivent les lignes du quadrillage ou sont des diagonales de ses carrés.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les barrières sont construites sur les « bords » des figures et correspondent aux périmètres des quatre polygones.
- Se rendre compte que les côtés des carrés et les diagonales des carrés ont des longueurs différentes.
- Constater que la longueur des diagonales du quadrillage est supérieure à celle des côtés du quadrillage
- Compter les segments qui forment le périmètre de chaque figure

  A : 4 diagonales + 8 côtés B : 12 côtés C : 2 diagonales + 10 côtés D : 2 diagonales + 8 côtés
- Comparer deux à deux les périmètres en les décomposant en nombres de côtés et nombres de diagonales puis en déterminant les « différences » et en retirant ce qui est commun aux deux périmètres :

  A > B car après le retrait de 8 côtés, il reste à comparer 4 diagonales et 4 côtés

  A > C car après le retrait de 8 côtés et 2 diagonales, il reste à comparer 2 diagonales et 2 côtés

  A > D car après le retrait de 8 côtés et 2 diagonales il reste 2 diagonales de plus pour A

  D < B car après le retrait de 8 côtés, il reste à comparer 2 diagonales avec 4 côtés

  (Cette comparaison est moins évidente que les précédentes. Pour décider on peut penser à visualiser deux segments : l'un de 4 quatre côtés et l'autre de 2 diagonales (comme ceux de la figure C par exemple)

  D < C car après le retrait de 8 côtés et 2 diagonales, il reste 2 côtés de plus pour C

  Ces comparaisons permettent d'affirmer que la barrière la plus longue est celle de A et la plus courte est celle de D

Ou, mesurer à la règle les segments qui constituent les périmètres des polygones et les additionner pour arriver aux mêmes conclusions. (Cette méthode exige des mesures à 1 ou 2 mm près et des additions de nombres décimaux, en cm, ou entiers, en mm)

Ou, pour chaque figure, suivre le pourtour avec une ficelle ou une bande ou autre matériel (en mettant éventuellement des marques d'un côté à l'autre). Puis comparer les longueurs des ficelles et noter que la plus longue est celle de A et la plus courte celle de D.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (la barrière de A est la plus longue et celle de D la plus courte) avec description claire des comparaisons deux à deux (voir analyse de la tâche) ou des mesures reportées sur le matériel utilisé

3 Réponse correcte et complète avec description peu claire ou incomplète de la procédure suivie ou quelques imprécisions ou erreurs de calcul dans les mesures

2 Réponse correcte mais illustrée seulement par une ou deux comparaisons

ou réponse correcte sans explication

ou une seule réponse correcte avec toutes les comparaisons nécessaires

ou réponse erronée due à des erreurs de calcul des mesures mais avec une procédure correcte

1 Début de recherche correct

ou une seule réponse correcte sans explication

0 Confusions systématiques entre longueurs des côtés et diagonales (soit considérées comme égales, soir considérées dans un rapport 1/2)

ou incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Rozzano

3. PARCOURS DE NOMBRES (Cat. 3, 4, 5)

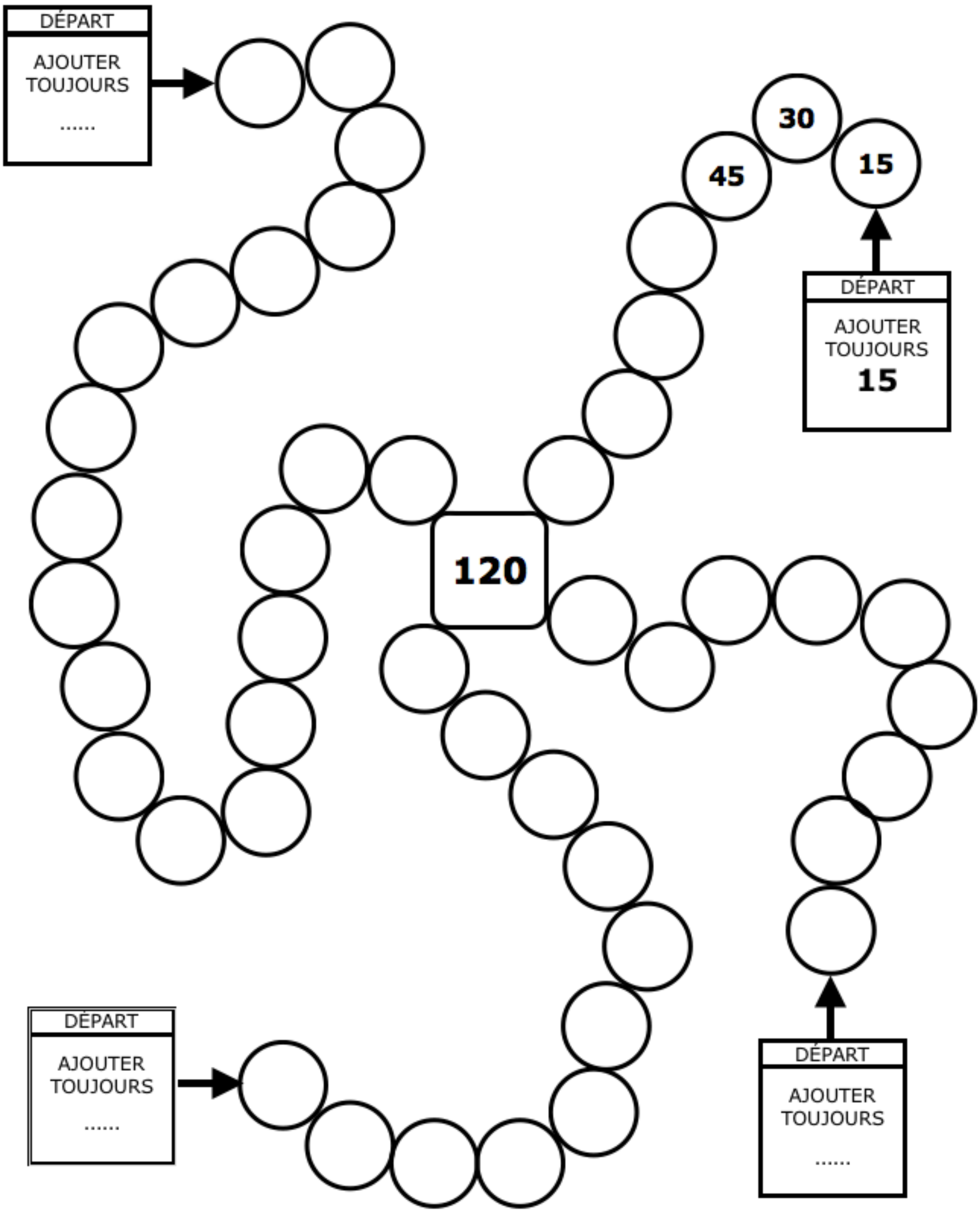
Frédéric veut compléter les quatre parcours de nombres dessinés ci-dessous.

Chaque parcours commence au cercle indiqué par une flèche noire et arrive au nombre 120.

Pour compléter correctement chaque parcours, il faut que le nombre du premier cercle soit égal au nombre inscrit sur l'étiquette DÉPART

Puis il faut poursuivre le parcours en ajoutant chaque fois ce nombre jusqu'à arriver à 120.

Frédéric a commencé à écrire les nombres du parcours où il doit compter de 15 en 15.



Complétez tous les parcours en écrivant les nombres qui conviennent sur les étiquettes de départ et à l'intérieur des cercles.

ANALYSE A PRIORI

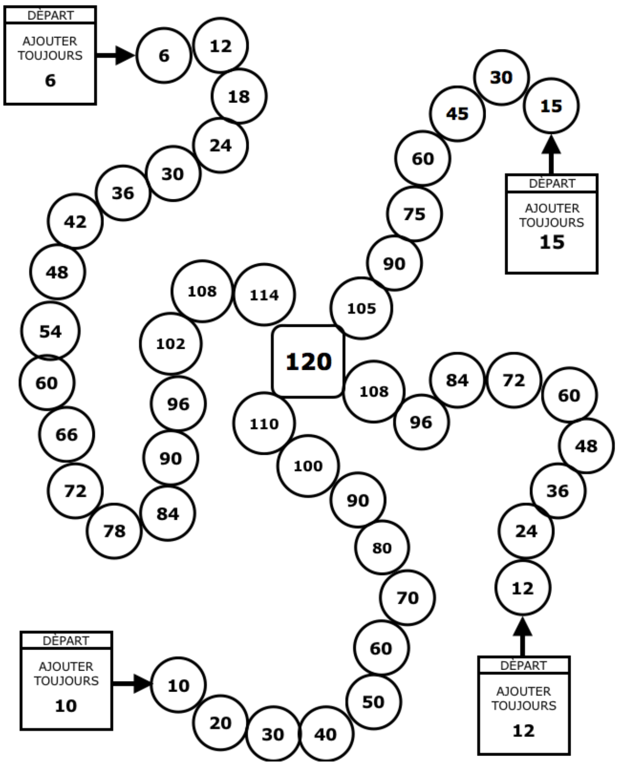
Tâche mathématique

Compléter quatre suites des premiers multiples d'un nombre. Pour trois d'entre elles, on ne connait que le nombre de termes, et le dernier terme, 120.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation : les quatre parcours représentés sur l'image doivent être complétés avec une suite ordonnée de multiples successifs du nombre indiqué sur l'étiquette de départ de chaque parcours pour arriver au nombre 120 ; le parcours des multiples de 15 est déjà commencé, et doit être complété ; pour compléter les autres parcours, il faut trouver d'abord la règle qui détermine chaque suite.
- Compléter le parcours des multiples de 15 en trouvant les nombres manquants.
- Pour trouver la règle qui détermine chacun des parcours qui ne sont pas encore définis,
  - on peut procéder par essais, en écrivant les multiples d'un premier nombre que l'on choisit, puis voir si à la fin on arrive exactement au nombre 120. Pour aller plus vite on peut voir que plus le nombre de cercles augmente, plus le nombre cherché diminue.
  - on peut compter les « emplacements », sans oublier celui du 120, pour trouver combien de multiples il faut insérer dans un parcours ; diviser ensuite le nombre 120 par le nombre de multiples pour trouver le nombre qui détermine la règle.

    120 ÷ 20 = **6** ; 120 ÷ 12 = **10 ;** 120 ÷ 10 = **12**
- Écrire les nombres aussi bien sur les étiquettes de départ qu'à l'intérieur des cercles pour compléter chaque parcours.



Attribution des points.

4 Réponse correcte, les nombres des quatre parcours, corrects et complets

3 Réponse avec trois parcours corrects et complets
ou réponse avec quatre parcours mais une à deux erreurs ou cases non complétées, dans un seul des parcours

2 Réponse avec deux parcours corrects et complets
ou réponse avec quatre parcours, mais de trois à cinq erreurs ou lacunes, dans un ou deux des parcours

1 Réponse avec un seul parcours correct et complet
ou réponse avec quatre parcours, mais avec plus de cinq erreurs ou lacunes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Udine

4. NOMBRES CACHÉS (Cat. 3, 4, 5)

Deux papillons se sont posés sur une page du cahier d'Ariane et cachent deux nombres.

 × 5 ×  = 80

Maintenant, on ne voit plus que les nombres 5 et 80, deux signes × et un signe =.

Les deux nombres cachés sont des nombres entiers, ils peuvent être égaux ou différents.

Quels peuvent être les deux nombres cachés ?

Indiquez toutes les possibilités et montrez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter un produit de trois facteurs égal à 80 dont un des facteurs est 5 et donner toutes les solutions composées de nombres naturels.

Analyse de la tâche

- Examiner l'écriture donnée, comprendre qu'elle se compose de quatre nombres dont deux sont cachés par les papillons, et qu'il s'agit d'une égalité : de 80 (à droite) et de deux multiplications successives (à gauche) dont il manque le premier facteur, dont on connaît le deuxième, 5, et dont il manque le troisième facteur.
- Comprendre qu'il s'agira de choisir un premier nombre, le multiplier par 5, calculer le produit, et multiplier ce produit par un deuxième nombre, à trouver, pour obtenir 80.
- Il y a deux façons de procéder
  1 par essais
    - en écrivant 1 dans la première case, on obtient 5 comme premier produit (1 × 5 = 5) qui doit être multiplié par le deuxième nombre caché pour obtenir 80. Ce deuxième nombre est 16 (5 × … = 80 ou 80 : 5 = 16),
    - Continuer de la même manière : avec 2 comme premier facteur, jusqu'à obtenir 8 comme deuxième nombre caché ; puis avec 3 et constater qu'il n'est pas possible d'obtenir un troisième facteur entier ; puis avec 4 pour obtenir les deux nombres cachés (4 ; 4), puis (8 ; 2). La recherche se termine après l'essai de 16 comme premier facteur.

  2 Comprendre qu'en effectuant la division de 80 par 5, on trouve le produit des deux nombres recherchés : 16 = 80 : 5. Rechercher alors les diviseurs de 16 et former correctement les paires de facteurs dont il est le produit : (1 ; 16) ; (2 ; 8), et (4 ; 4).

Attribution des points

4 Réponse correcte, les trois possibilités (1 ; 16), (2 ; 8), (4 ; 4) avec éventuellement aussi (8 ; 2) et (16 ; 1), avec une description complète de la procédure utilisée (tous les calculs ou tentatives effectués)

3 Réponse correcte avec description incomplète de la procédure utilisée (absence de calcul ou liste incomplète des tentatives)
ou deux paires correctes avec descriptions claires

2 Réponse correcte sans explications
ou réponse avec deux paires correctes avec une description peu claire
ou seulement une paire avec description claire
ou liste correcte des nombres possibles (1 , 2 , 4, 8 , 16), mais sans les paires correspondantes

1 Début de raisonnement correct, mais avec des paires incorrectes de nombres en raison d'une erreur de calcul
ou une ou deux paire identifiées sans explications

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Riva del Garda

5. DES ENFANTS … BIEN SALÉS ! (Cat. 3, 4, 5)

Les élèves et les deux enseignants de la classe 3B vont visiter une mine de sel dans les Alpes suisses.

À l'entrée, ils sont répartis en deux groupes, formés chacun du même nombre d'élèves et d'un enseignant.

Le premier groupe commence par visiter le Musée de la mine.

Le second groupe commence par la visite de la mine de sel sur un petit train avec des wagons dans lesquels peuvent prendre place quatre personnes au maximum. Les élèves et l'enseignant occupent entièrement trois wagons et une partie d'un quatrième.

Combien peut-il y avoir d'élèves dans la classe 3B ?

Donnez toutes les solutions possibles et montrez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver les nombres dont la moitié est 3×4 ou $3 \times 4 + 1$ ou $3 \times 4 + 2$

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : la classe se divise en deux et dans chaque groupe il y a l'un des deux enseignants ; puis il y a 3 wagons de 4 personnes et un wagon incomplet pouvant accueillir 1 ou 2 ou 3 personnes dont l'une peut être un l'enseignant.
- Le groupe du train peut être formé des 12 personnes (3×4) des wagons complets avec 1, 2 ou 3 personnes en plus soit 13 ; 14 ou 15 personnes dont il faut soustraire l'enseignant ; c'est-à-dire 12, 13 ou 14 élèves.
- Multiplier ces trois nombres par 2 pour déterminer l'effectif de la classe : 24 ; 26 ou 28 élèves.

Ou partir des trois possibilités de personnes (13 ; 14 ou 15) multiplier par 2 et soustraire les deux enseignants.

Attribution des points

4 Les trois solutions (24, 26 et 28) avec une description complète de la démarche (reconnaissance des trois nombres 13, 14, 15 puis de 12, 13, 14 et multiplication par 2 …)

3 Les trois solutions (24, 26 et 28) avec une description incomplète de la démarche

2 Les trois solutions (24, 26 et 28) sans description de la démarche
ou deux solutions avec une description de la démarche
ou réponses 26, 28 et 30 avec une description de la démarche mais oubli de la soustraction des deux enseignants
ou réponse 12, 13, 14 avec une description de la démarche mais oubli de multiplication par 2

1 Début de recherche, avec essais mais sans arriver à la solution
ou une ou deux solutions sans description de la démarche
ou réponse 13, 14, 15

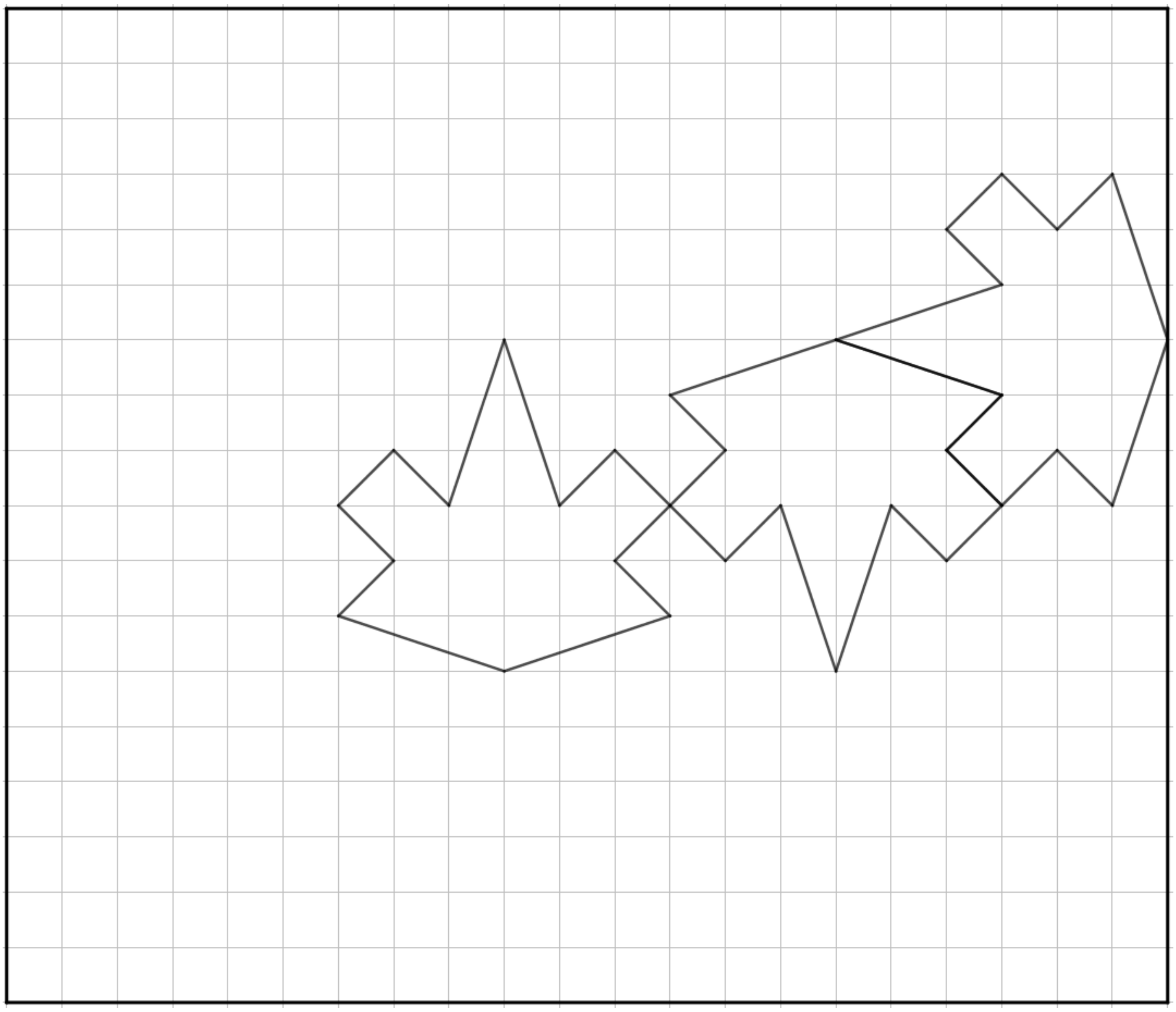
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Romagna

6. FEUILLES EN PAPIER (Cat. 4, 5, 6)

Bruno a dessiné trois feuilles sur la carte quadrillée qu'on voit ci-dessous.



Il veut maintenant continuer à dessiner sur la carte le plus grand nombre possible de feuilles toutes entières et identiques aux trois déjà dessinées.

Bruno veut ensuite colorier soit en vert, soit en rouge, toutes les feuilles entières qu'il aura réussi à dessiner, de façon à ce que deux feuilles qui se touchent par un côté, ou plus d'un côté, ne soient pas de la même couleur.

Dessinez, sur la carte de Bruno le plus grand nombre possible de feuilles entières et coloriez-les comme il le veut.

ANALYSE A PRIORI

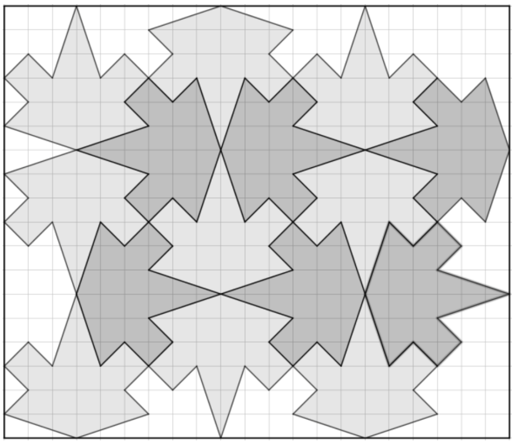
Tâche mathématique

Compléter le pavage d'un quadrillage avec des polygones entiers qui ont douze côtés et un axe de symétrie ; colorier toutes les figures entières avec deux couleurs, de façon à ce que deux figures ayant au moins un côté en commun soient de couleurs différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de recouvrir le quadrillage avec le plus grand nombre possible de feuilles identiques à celles déjà dessinées.

- Comprendre, à partir des feuilles déjà dessinées que, pour remplir tous les espaces sans se superposer, les feuilles doivent être déplacées (par une translation et/ou une rotation ou une symétrie axiale).
- Pour placer les nouvelles feuilles on peut procéder simplement par découpage de modèles de feuille qu'on déplace comme des pièces de puzzles ou, par reproduction, de proche en proche, de feuilles déjà dessinées (par exemple la feuille de droite va s'insérer entre les deux autres après une translation de 7 diagonales de carreaux vers le bas et vers la gauche ; la feuille du milieu peut se retourner (demi-tour ou « effet miroir », avec sa pointe dirigée vers le haut et s'insérer entre le haut de la page, et la feuille de droite).
- Dessiner les feuilles (ou découper plusieurs modèles pour les coller) de façon qu'entre elles il n'y ait pas d'espace vide et qu'elles ne se superposent pas, pour arriver au nombre maximum de feuilles possible (15).
- Colorier les feuilles entières en rouge ou vert de façon à ce que les feuilles ayant un côté ou plus en commun ne soient pas de la même couleur.



Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : les 15 feuilles sont dessinées et coloriées correctement (ou au moins avec les couleurs indiquées)

3 Réponse incomplète avec 14 feuilles dessinées et coloriées correctement

ou réponse avec 15 feuilles mais une erreur de coloriage (deux feuilles contigües ont la même couleur, ou les couleurs utilisées ne sont pas celles indiquées)

ou les 15 feuilles entières coloriées correctement et les feuilles non entières aussi coloriées en respectant la consigne sur les couleurs différentes de feuilles voisines

2 Réponse incomplète avec 9 à 13 feuilles dessinées et coloriées correctement

ou dessin de 14 ou 15 feuilles identiques au modèle donné, mais avec des erreurs dans le coloriage

1 Dessin de moins de 9 feuilles sans superposition ou erreurs dans le dessin de quelques-unes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Udine

7. CHOCOLAT EN SCÈNE (Cat. 5, 6)

Dans une chocolaterie, Zoé prend une boîte de chocolats. Elle s'adresse au vendeur.

Zoé : *Bonjour Monsieur, dans cette boîte y a-t-il autant de chocolats noirs que de chocolats blancs ?*

Le vendeur : *Non. Si vous voulez je peux remplacer un chocolat noir par un chocolat blanc pour qu'il y ait autant de chocolats de chaque sorte.*

Zoé : *Oh non ! Au contraire ! N'enlevez pas de chocolats noirs, ce sont mes préférés*.

Le vendeur : *Très bien, si vous voulez je peux remplacer un chocolat blanc par un chocolat noir. Dans ce cas, le nombre de chocolats noirs sera le double du nombre de chocolats blancs.*

Combien de chocolats de chaque couleur y a-t-il dans cette boîte ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres tels que, si on diminuait le premier de 1 et que l'on augmentait le second de 1 ils seraient égaux et si l'on diminuait le second de 1 et que l'on augmentait le premier de 1, ce dernier serait le double du second.

Analyse de la tâche

- Lire le texte et comprendre que ce sont les nombres de chocolats de chaque sorte qui sont à déterminer à partir des deux échanges proposés, en particulier : « Remplacer un noir pas un blanc » signifie « retirer un noir et mettre un blanc à sa place », ou encore « enlever un noir et ajouter un blanc » ou encore « diminuer de 1 le nombre de noirs et augmenter de 1 le nombre de blancs » Par la même occasion, comprendre qu'il y a plus de noirs que de blancs. (De même pour « remplacer un blanc par un noir »).
- Après le premier échange où les nombres de noirs et de blancs sont devenus égaux revenir à l'état initial (en retirant un noir et remettant un blanc) pour comprendre qu'il y avait deux noirs de plus que de blancs.
- De la seconde relation avant et après les échanges, percevoir que le nombre de noirs augmenté de 1 est le double du nombre de blancs diminué de 1.
- Pour la résolution quelques essais suffisent, en partant de l'écart de 2, pour voir que parmi les couple (n ; b) (3 ; 1), (4 ; 2), (5 ; 3) il faut aller jusqu'à (7 ; 5) pour trouver celui qui répond à la deuxième relation : parce que 8 (7 + 1) est le double de 4 (5 – 1).

Ou, en partant du double, il ne faut aussi que quelques essais pour trouver que parmi les couples (2 ;1) ; (4 ;2) ; (6 ;3) ; (8 ;4) ; (10 ; 5) ;… c'est (8 ; 4) qui convient parce que 7 (8 – 1) vaut 2 de plus que 5 (4 + 1).

Attribution des points

4 Réponse correcte (5 blancs et 7 noirs) avec une description du raisonnement suivi ou une vérification du genre « si on remplace un noir par un blanc on aura 6 et 6 et si on remplace un blanc par un noir on aura 8 qui est le double de 4 »

3 Réponse correcte (5 blancs et 7 noirs) avec une description incomplète ou une vérification partielle (par exemple « on a fait des essais » mais avec une liste partielle de ces essais ou sans les décrire)

2 Réponse erronée due à une erreur de calcul mais raisonnement clair et complet sur les deux contraintes
ou réponse « 12 chocolats en tout » avec une description claire ou complète du raisonnement
ou réponse correcte sans aucune explication

1 Début cohérent de recherche (par exemple : quelques essais cohérents sans aboutir à la réponse ou représentation cohérente du problème par dessins ou expressions mathématiques)
ou réponse « 12 chocolats en tout »

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Lyon

8. L'HABIT DE POUPÉE (Cat. 5, 6)

Paola veut coudre un ruban sur la bordure d'un habit de poupée.

Elle dispose de quatre pièces de couleurs différentes : rouge, jaune, verte et bleue qu'elle coud ensemble bout à bout pour obtenir un seul ruban de 66 cm de longueur.

Dans ce ruban :

- aucune pièce de couleur ne mesure moins de 10 cm ni plus de 20 cm ;
- la pièce verte est la plus courte de toutes alors que la pièce bleue est la plus longue ;
- chaque pièce mesure un nombre entier de centimètres ;
- la partie du ruban formée de la pièce rouge et de la pièce jaune est de même longueur que la partie formée des pièces verte et bleue.
- la pièce rouge mesure 1 cm de moins que la pièce jaune.

Quelles pourraient être les longueurs de chaque pièce de ruban coloré ?

Écrivez toutes les solutions possibles et montrez comment vous les avez trouvées

---

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver quatre nombres naturels dont la somme est 66, dont aucun n'est plus grand que 20 ni plus petit que 10, dont la somme du premier et du troisième est égale à la somme du deuxième et du quatrième, dont la différence entre le premier et le troisième est 1.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation : un ruban de 66 cm de longueur, formé de quatre pièces de couleur, dont on ne connaît pas les longueurs mais des relations permettant de les déterminer.
- Comprendre l'information de la quatrième condition : le ruban peut être divisé en deux parties égales : l'une formée de R + J, l'autre de V + B chacune de 33 cm (66 : 2).
- Tirer de la troisième condition la longueur des rubans rouge et jaune qui, en cas d'égalité serait 16,5 cm, mais comme R = J – 1 on a alors R = 16 cm et J = 17 cm.
- De la première et de la quatrième conditions, les longueurs possibles de B et V sont respectivement 18, 19 ou 20 cm, et 33 – 18 = 15 ou 33 – 19 = 14 ou 33 – 20 = 13.
- On trouve alors les solutions

  pour R et J, une seule possibilité : R = 16 et J 17 ;

  pour V et B trois possibilités ; V = 13 si B = 20 ou V = 14 si B = 19 ou V = 15 si B = 18.

Ou procéder per essais, choisissant une valeur de R, ajouter 1 et trouver J, additionner ces deux nombres pour trouver R + J = V + B et se rendre compte que la somme des deux parties (ou le double d'une des deux) doit être 66. Si ce n'est pas le cas, procéder à un autre essai ou comprendre que R + J est la moitié de 66.

Ou après avoir compris que R + J = V + B, ce qui signifie que R + J = 66 : 2 = 33 utiliser une représentation graphique ou une écriture symbolique pour exprimer la relation R + J = R + R + 1 = 33 et en tirer R = 16 et J = 17.

Une fois connus R et J, comprendre que B, la plus longue, peut valoir 20, 19 ou 18 et trouver les valeurs de V correspondantes.

Attribution des points

4 Réponse correcte (R = 16 ; J = 17 ; V = 13 ou 14 ou 15 ; B = 20 ou 19 ou 18) avec les trois possibilités pour le couple V et B avec description claire de la démarche accompagnée des calculs nécessaires

3 Réponse correcte avec description partielle ou peu claire

ou seulement les longueurs des pièces (avec toutes les possibilités pour V et B) sans spécifier les relations entre V et B (par exemple R = 16 ; J = 17 ; V = 13 ou 14 ou 15 ; B = 18 ou 19 ou 20), mais avec description claire de la démarche

2 Réponse correcte sans description ni calculs

ou longueurs correctes pour R et J, et seulement deux couples de valeurs pour V et B (par exemple absence de 20 pour avoir mal interprété la condition « …ni plus de 20 ») avec description claire et calculs

ou présence d'une seule erreur de calcul, mais avec description claire

1 Réponse incomplète : longueurs correctes pour R et J, une seule possibilité trouvée pour le couple V et B ou réponse qui ne tient pas compte de toutes les conditions

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Parma

9. MODÈLES RÉDUITS (Cat. 5, 6, 7)

Jean retire ses 96 petites voitures des étagères de sa chambre et les range dans trois boîtes (une petite, une moyenne et une grande).

- Le nombre de petites voitures qu'il met dans la boîte moyenne est le triple du nombre de petites voitures qu'il met dans la petite boîte.
- Le nombre de petites voitures qu'il met dans la grande boîte est le double de celui du nombre de petites voitures qu'il met dans la boîte moyenne.

Après avoir rempli les trois boîtes, il reste des petites voitures. Leur nombre est égal au tiers du nombre de voitures que Jean a mises dans la grande boîte.

Combien de petites voitures Jean a-t-il mis dans chaque boîte ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Partager 96 en quatre nombres proportionnels à 1, 2, 3 et 6.

Analyse de la tâche

- De la lecture de l'énoncé, comprendre qu'il y a quatre nombres de voitures à déterminer, celles contenues dans les trois boîtes et celles qui restent, dont la somme est 96 ; qu'aucun des nombres n'est connu et qu'il faudra recourir aux relations « double », « triple » et « tiers ».
- Remarquer que ces relations permettent d'exprimer chaque nombre en fonction de celui de la petite boîte et les traduire par, un « petit », un « moyen » qui est le triple du « petit » un « grand » qui est le double du « moyen » et un reste qui est le tiers du « grand ».
- En procédant par essais et ajustements progressifs on peut partir du nombre de la petite boîte, écrire les quadruplets possibles : 1, 3, 6, 2 (total 12), puis 2, 6, 12, 4 (total 24), …et se rendre compte qu'il faut aller jusqu'à 8, 24, 48, 16 pour satisfaire la condition que la somme est 96.
- En procédant de manière plus synthétique (ou pré-algébrique) on peut laisser un des nombres indéterminé provisoirement (le petit par exemple) et calculer que la somme de 1 « petit », 3 « petits », 6 « petits », 2 « petits » représente 12 « petits » correspondant à 96. Il ne reste alors plus qu'à diviser 96 par 12 pour déterminer le nombre de voitures de la petite boîte 8, puis de déterminer les nombres des autres boîtes.
- Algébriquement : établir et résoudre l'équation où l'inconnue x est le nombre de voitures dans la petite boîte: $x + 3x + 6x + 2x = 96$. Dont la solution est 8.

Attribution des points

4 Réponse correcte (petite boîte : 8 voitures, boîte moyenne : 24 voitures, grande boîte : 48 voitures,) avec explications complètes et claires, par exemple essais organisés, ou la mention d'un total de 12 petites boîtes, ou un schéma faisant apparaître clairement l'unité commune

3 Réponse correcte et complète avec explications incomplètes ou peu claires (par exemple, la division 96 : 12 sans expliquer à quoi correspond 8, ou essais non organisés)

2 Réponse correcte sans explications
ou raisonnement correct avec une erreur de calcul dans la résolution

1 Début de recherche cohérente avec quelques tentatives ne menant pas à la solution
ou identification du nombre restant de modèles réduits.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Groupe Calcul et Proportionnalité, variante de *Les Prunes,* 25.II.11 et *Les Châtaignes de Charles* 22.11.09

10. LE TANGRAM DU MENUISIER (I) (Cat. 6, 7)

Un menuisier construit des Tangram en bois.*

Un jour, un client lui commande un Tangram dont le côté du petit carré mesure 6 cm.

Combien mesurera le côté du Tangram, quand le menuisier aura fini son travail ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et décrivez en détail comment vous avez procédé.

** Le Tangram (voir photo) est un puzzle très connu, originaire de la Chine ancienne. Il s'agit d'un grand carré constitué de sept pièces, dont un petit carré, permettant de réaliser de très nombreuses figures.*

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir de la photo d'un Tangram et de ses sept pièces, trouver la mesure du côté du Tangram connaissant la mesure du côté de la petite pièce carrée (6 cm).

Analyse de la tâche

- Observer la photo et « voir » qu'il s'agit d'un puzzle de 7 pièces, constater qu'il y a cinq pièces en forme de triangle, que l'une est un carré (selon l'énoncé) et la dernière un quadrilatère.
- Analyser les rapports entre les côtés des pièces (Y a-t-il des côtés égaux ? des côtés dont la longueur est le double de celle d'un autre ?) puisque la seule donnée numérique est le côté du petit carré (6) et la question porte sur le côté du Tangram. Voir aussi qu'on peut s'intéresser aux aires des pièces, (Y a-t-il des pièces avec des aires égales ? des pièces dont l'aire est le double de celle d'une autre ?)

Il y a plusieurs manières de procéder :

a) reproduire le dessin en vraie grandeur à partir d'un carré de 6 cm de côté, dont on prolonge deux côtés perpendiculaires (qui deviendront les diagonales du Tangram), etc. Cette procédure permet d'arriver à la réponse 17 cm, à 1 mm près.

b) observer la figure, déduire que la diagonale du petit carré représente la moitié du côté du Tangram à construire. Au niveau 7 le théorème de Pythagore peut être déjà connu, calculer ainsi la mesure et la doubler, en arrondissant.

c) découper les pièces et procéder par déplacements et superpositions (translations, rotations, …)

d) recourir, dans le cadre géométrique, à de simples déductions à partir des propriétés élémentaires des figures.

- Par exemple, voici quelques-unes de ces déductions (la pièce carrée est représentée par un carré)
    - de la position de ce carré => les deux grands et les deux petits triangles, voisins, sont rectangles,
    - les deux grands triangles étant rectangles => leur côté commun est sur la deuxième diagonale du Tangram => qui aboutit au sommet inférieur droit et sépare le triangle moyen en deux triangles rectangles,
    - la diagonale « verticale » du petit carré le décompose en deux triangles rectangles => en glissant de 6 cm le demi carré de gauche le long de la diagonale du Tangram, il se superpose exactement au petit triangle du Tangram du haut à droite => ce petit triangle est un demi carré, ses côtés de l'angle droit mesurent 6 cm et son grand côté (que nous appelons ici provisoirement « d » peut être estimé en mesurant la diagonale d'un carré de 6 cm de côté) ≈ 8,5 cm => les demi-diagonales du Tangram ou les côtés de l'angle droit des grands triangles mesurent 12 cm.

  On aboutit ainsi aux quatre longueurs possibles des côtés de sept pièces : 6 ou 12 ou « d » ou 2 × « d » (cm) ; en particulier les côtés des grands triangles rectangles mesurent, 12, 12, et 2 × « d » (cm) dont le dernier donnerait la réponse au problème si on était en mesure de le calculer. Sinon, les élèves peuvent éventuellement dessiner un triangle rectangle isocèle avec des côtés égaux de 12 cm et mesurer l'autre côté, celui indiqué provisoirement par « d ».

Ou : passer par les aires des pièces à partir des déductions précédentes : en cm^2 celle du carré est 36, celle d'un petit triangle 18, celles du triangle moyen et du parallélogramme (composé de deux petits triangles) 36, celle de chacun des grands triangles 72, et finalement celle du Tangram 288 (avec le petit triangle comme unité on trouve 16 et 16 × 18 = 288). On peut aussi considérer que le triangle moyen est la moitié d'un carré, le quart du Tangram en bas à droite, dont l'aire est 72 (cm^2).

Dans un cas comme dans l'autre, il faut rechercher le côté d'un carré dont on connaît l'aire. Pour 288 c'est le nombre qui multiplié par lui-même donne 288, désigné par $\sqrt{288}$ mais donné par une de ses approximations ≈ 17 ou 16,97 … Pour le côté du carré d'aire $\sqrt{72}$ ≈ 8,5 ou 8,48… qu'il faudra multiplier par 2 pour arriver à la réponse.

Attribution des points

4 Réponse correcte (la mesure du côté du Tangram est, en cm, $\sqrt{288}$, ou une valeur numérique de 16,9 à 17,1cm en cas de détermination par dessin - avec présentation du dessin - ou ≈ 17 ou 16,97 … par la calculatrice ou encore $12\sqrt{2}$ - pour ceux qui auraient retenu la formule $c\sqrt{2}$), avec le détail de toutes les mesures intermédiaires trouvées - d'aires ou de longueurs - et quelques mots pour décrire la démarche comme, par exemple : les petits triangles sont la moitié du petit carré ou le côté du Tangram mesure le double de la diagonale du petit carré interne, avec une justification

3 Réponse correcte avec le détail de certaines mesures et description peu claire

2 Réponse correcte sans aucune explication ni détails de la procédure

ou réponse erronée (par exemple avec des erreurs de calcul), avec le détail de certaines mesures intermédiaires et description claire

1 Réponse qui se limite à l'aire du Tangram (288 cm^2)

ou mesure proche de 17 (inférieure à 16,8 ou supérieure à 17,1) sans présentation du dessin sur lequel a été prise la mesure

ou début de recherche cohérent avec quelques mesures ou relations trouvées entre les aires ou les côtés des figures

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

Origine : Groupe Géométrie plane (GTGP)

11. COMME VOUS AVEZ DE GRANDES JAMBES … (I) (Cat. 6, 7, 8)

Le Loup et le Petit Chaperon Rouge se rencontrent dans la forêt et se dirigent tous les deux vers la maison de la grand-mère.

Le Loup rit, très satisfait :

Ah ! Ah ! Ah ! Ah ! Le Petit Chaperon Rouge fait deux pas pendant que je fais un bond qui vaut trois de ses pas, j'arriverai bien avant elle !

De son côté, le Petit Chaperon Rouge semble aussi très satisfaite :

Cette fois-ci, le vieux tricheur ne pourra pas arriver avant moi parce que je connais un raccourci.

Le Petit Chaperon Rouge fait 92 pas en passant par le raccourci, alors qu'elle aurait fait 141 pas en passant par le chemin que le Loup a pris.

Qui arrivera en premier chez la grand-mère, le Loup ou le Petit Chaperon Rouge ? Avec combien de pas d'avance ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer la durée nécessaire pour parcourir une distance de 141 pas à une vitesse de trois pas par unité de temps, à la durée nécessaire pour parcourir une distance de 92 pas à une vitesse de deux pas par unité de temps.

Analyse de la tâche

- Comprendre les données de l'énoncé en s'appuyant éventuellement sur un schéma :
  - La longueur d'un bond du loup est de 3 pas ;
  - Le Petit Chaperon Rouge (PCR) parcourt une distance de deux pas pendant que le loup effectue un bond,
- Procéder par essais pour mettre en correspondance, la distance en pas parcourue par le loup (3n) et celle parcourue par le petit chaperon rouge (2n), et organiser ces essais (le tableau suivant donne l'ensemble des essais)

Unité de temps	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**20**	**30**	**40**	**41**	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**
PCR	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	40	60	80	82	84	86	88	90	92
Loup	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	60	90	120	123	126	129	132	135	138

- Constater que PCR parcourt les 92 pas du raccourci pendant que les bonds du loup sur son chemin correspondent à 138 pas du PCR, qui arrivera donc le premier. Le loup aura encore 3 pas - ou un bond - à faire.

Ou : diviser par 3 les 141 pas du PCR pour déterminer combien il faudra de bonds au loup pour parcourir son chemin : 141 : 3 = 47 ; puis diviser par 2 les 92 pas nécessaires au PCR par son raccourci : 92 : 2 = 46. Pendant que le PCR fait 46 couples de pas, le loup fait 46 bonds. En conclure que le PCR arrive le premier avec un avantage de 3 de ses pas ou d'un bond du loup.

Ou : Raisonner par proportionnalité (intuitive) avec le rapport (2 pour 3) en pas du PCR, qui peut être transformé mentalement par multiplications et additions en (20 pour 30), (80 pour 120), (10 pour 15), (90 pour 135) et finalement (92 pour 138) qui permet de dire que lorsque le PCR a fait ses 92 pas, le loup en a fait 138 seulement et non encore 141.

Attribution des points

4 Réponse correcte (le Petit Chaperon Rouge arrive la première chez la grand-mère, avec 3 de ses pas d'avance sur le loup), avec une description claire de la démarche suivie : présentation des mises en correspondance entre les distances parcourues par le loup et par le petit chaperon rouge ou détails des calculs effectués

3 Réponse correcte (le PCR arrive la première chez la grand-mère, avec 3 de ses pas d'avance sur le loup) mais avec une description peu claire

2 Réponse correcte, sans explications

ou raisonnement correct mais avec une erreur de calcul

ou réponse incomplète (le PCR arrive la première), sans indication du nombre de pas en plus, avec une description claire de la démarche suivie, ou le détail des calculs dans lesquels soit 138 soit 141 apparaissent

1 Début de recherche cohérente (par exemple schéma ou début de liste mettant en correspondance des distances parcourues dans le même temps par le loup et le PCR)

ou réponse incomplète (le PCR arrive le premier), sans indication du nombre de pas en plus et sans description de la procédure

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Milano

12. ÉGALITÉ À COMPLÉTER (Cat. 6, 7, 8)

Aujourd'hui, l'enseignant a proposé à ses élèves cette égalité à compléter

..... × 90 × ..... = 1620

et a donné les précisons suivantes.

L'un des deux nombres à écrire à la place des **.....**

- s'écrit avec deux chiffres ;
- est compris entre 0 et 10 ;
- a 5 comme dernier chiffre.

L'autre nombre s'écrit aussi avec deux chiffres.

Écrivez toutes les paires de nombres qui peuvent être écrites à la place des pointillés pour que l'égalité soit vérifiée.

Expliquez comment vous les avez trouvées.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver toutes les paires de nombres positifs, dont le produit multiplié par 90 est 1620, tels qu'un des nombres est inférieur à 10 et s'écrit avec deux chiffres dont le dernier est 5.

Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie gauche de l'égalité est un produit de trois facteurs dont un seul est connu (90) ; c'est à dire qu'il y a deux multiplications à effectuer : une première par un premier nombre et 90, une seconde par ce résultat et un deuxième nombre, dont le produit doit être 1620.
- Savoir que la multiplication est commutative et que, en cas de produits de trois nombres, l'opération est associative.

  Par exemple, dans cette expression on peut commuter les deux premiers nombres et associer ensuite les deux autres (encore inconnus) pour transformer l'expression de l'énoncé en 90 × (__ × __) = 1620, ou 90 × … = 1620 et que le produit encore indéterminé se calcule par l'opération 1620 : 90 = 18.
- Comprendre que l'un des facteurs qui s'écrit avec deux chiffres en se terminant par 5 est obligatoirement de la forme … , 5 et doit être choisi entre 0,5 ou 1,5 ou 2,5 ou 3,5 ; ... ; 9,5. La recherche consiste donc à trouver les quotients de 18 par un des nombres précédents, qui s'écrivent avec deux chiffres seulement.
- On trouve ainsi, après division, les paires de nombres solutions : (0,5 ; 36) ; (1,5 ; 12) ; (2,5 ; 7,2) ; (7,5 ; 2,4) ; toutes les autres paires doivent être exclues car ne répondant pas aux conditions données.

Attribution des points

4 Réponse correcte (les quatre paires possibles : (0,5 ; 36) ; (1,5 ; 12) ; (2,5 ; 7,2) ; (7,5 ; 2,4) (avec éventuellement les quatre paires « symétriques » (36 ; 0,5), (12 ; 1,5) …) avec une description correcte et complète de la procédure utilisée (tous les calculs ou tentatives effectués)

3 Réponse correcte avec description incomplète de la procédure utilisée (absence de quelques calculs ou liste incomplète des essais)

2 Réponse partiellement correcte avec identification de 2 à 3 paires de nombres correctes et une description correcte de la procédure utilisée

ou les quatre paires avec une description correcte et complète de la procédure utilisée mais avec l'ajout d'une paire qui ne prend pas en compte les conditions requises (par exemple la paire 4,5 et 4 ou ...)

ou les nombres à insérer dans les espaces sont trouvés (0,5 ; 1,5 ; 2,4 ; 2,5 ; 7,2 ; 7,5 ; 12 ; 36) mais pas regroupés en paires

ou procédure correcte, mais mauvaise réponse due à une erreur de calcul

ou réponse correcte sans explication

1 Début correct de raisonnement permettant d'identifier une paire de nombres corrects

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Riva del Garda

13. LA MEILLEURE PÂTISSIÈRE (Cat. 7, 8)

Anne, Betty et Carla participent à un concours de pâtisserie.

Elles doivent préparer des fondants au chocolat dans un temps limité.

Anne est rapide. Elle en prépare deux de plus que Carla et elle en prépare exactement le double de Betty. En attendant la décision des juges, Anne se dit : *En préparant 4 autres fondants, j'en aurais fait le double de Carla*.

Combien de fondants a préparés Betty ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer trois nombres naturels sachant que le premier est le double du deuxième, qu'il est supérieur de 2 au troisième et qu'en lui ajoutant 4 il est le double du troisième.

Analyse de la tâche

- Constater que la question porte sur le nombre de fondants B de Betty mais qu'il est nécessaire de trouver le nombre de fondants de chacune des filles : A (Anne), B et C (Carla) et que les trois nombres sont soumis à trois conditions qui se rapportent toutes à A
  - A vaut 2 de plus que C
  - A est le double de B
  - Si on augmente A de 4 il sera le double de C
- Procéder par essais en choisissant un nombre de fondants pour Anne : comprendre qu'il doit être un multiple de 2 et qu'il doit être supérieur à 2. Si Anne fait 4 fondants, Betty en fait 2 et Carla en fait 2 mais la troisième condition n'est pas respectée car 4 + 4 = 8 n'est pas le double du nombre de fondants de Carla. Poursuivre avec les nombres pairs suivants jusqu'à constater que si Anne fait 8 fondants la troisième condition est vérifiée car le nombre de fondants de Carla serait 6 et 8 + 4 = 12 = 6 x 2. Conclure que Betty a fait 4 fondants.

  Il est aussi possible d'effectuer des essais à partir du nombre de fondants de Carla et après avoir déterminé le nombre d'Anne de diviser ce nombre par deux pour trouver le nombre de fondants qu'a préparés Betty, ou encore à partir du nombre de Betty.

  (Dans tous les cas, les essais peuvent être organisés par lignes ou tableaux)

Ou, effectuer un raisonnement déductif (arithmétique ou algébrique) en traduisant les relations entre les trois nombres en écriture symbolique (ou au moyen d'une représentation graphique) :

$A = C + 2$ $A = 2B$ $A + 4 = 2C$

puis effectuer une substitution, par exemple en remplaçant A par C + 2 et déduire que C + 6 = 2C, à partir de quoi on trouve C = 6, puis A = 8 et B = 4.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Betty a préparé 4 fondants), avec description de la procédure suivie (explicitation des essais, procédure arithmétique ou algébrique bien expliquée)

3 Réponse correcte avec une description peu claire ou incomplète de la procédure

ou réponse correcte avec seulement la vérification de la solution

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse erronée à cause d'une erreur de calcul

1 Début de recherche correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8

Origine : Groupe Algèbre (GTAL)

14. LA FÊTE DES CHÂTAIGNES (Cat. 7, 8, 9, 10)

La Fête des châtaignes s'est déroulée lors d'une semaine d'octobre, du mercredi au dimanche. Aude, Julie, Mario, Nicolas et Rose étaient volontaires pour tenir, chacun un seul jour, le stand de la vente des châtaignes.

Au cours de leur jour de présence, une des personnes a vendu 18 kilos de châtaignes, une autre 20 kilos, une autre 21 kilos, une autre 23 kilos et une autre encore 26 kilos.

On sait que :

- Nicolas a tenu le stand le mercredi ;
- la personne qui a tenu le stand le samedi a vendu 2 kilos de châtaignes de moins que Rose mais 3 kilos de plus que celle qui était présente le jeudi ;
- Julie tenait le stand un autre jour que le samedi ;
- la personne qui tenait le stand le vendredi a vendu plus de châtaignes que chacune des autres ;
- Aude a tenu le stand le jour avant Julie.

Quel est le jour où Mario a tenu le stand et combien de kilos de châtaignes a-t-il vendus ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstruire une répartition entre cinq personnes, au cours de cinq jours, selon cinq quantités de marchandises vendues, à partir de quelques affirmations sur les jours, personnages et relations entre quantités de marchandises vendues

Analyse de la tâche

- En lisant le texte, comprendre qu'il y a cinq personnages, cinq jours différents de la semaine et cinq quantités différentes de châtaignes vendues chaque jour.
- Lire les informations indiquées dans le texte une par une et réaliser qu'il est parfois nécessaire d'en combiner plusieurs afin de déterminer progressivement les associations entre le personnage, le jour de la semaine et la quantité de châtaignes vendues ce jour-là.
- Procéder en notant progressivement sur un diagramme ou un tableau ce qui est obtenu à partir d'une seule information ou ce qui est déduit d'une combinaison de plus d'informations parmi celles de l'énoncé, considérées dans l'ordre donné ou dans un ordre différent. Il y a plusieurs manières de procéder :

  Par exemple :

  - En tenant compte des quantités de châtaignes vendues, obtenir de la deuxième indication que la seule quantité compatible avec les données est 21 kg ($21 = 18 + 3 = 23 - 2$), ce qui correspond donc à la quantité de châtaignes vendues le samedi. Il en résulte que Rose a vendu 23 kg et que 18 kg ont été vendus jeudi.
  - La quatrième indication indique que 26 kg ont été vendus vendredi.
  - D'après la première indication, Nicolas est au stand mercredi et c'est donc lui qui a vendu 20 kg de châtaignes (c'est la seule quantité restant à attribuer). On en déduit par conséquent que Rose a vendu 23 kg de châtaignes dimanche.
  - D'après la troisième indication, Julie aurait pu être au stand jeudi ou vendredi, mais en combinant cette information avec la cinquième, il est clair qu'Aude tient le stand jeudi et que, par conséquent, Julie est présente le vendredi. Le seul nom qui reste à être associé est Mario, qui était au stand le samedi et a vendu 21 kg de châtaignes

Ou : utiliser une procédure mixte par déductions et essais en vérifiant à chaque fois la compatibilité avec les conditions données, jusqu'à aboutir à la solution.

Attribution des points

4 Réponse correcte (Mario a tenu le stand le samedi et a vendu 21 kg de châtaignes) avec la configuration complète de toutes les associations et les déductions progressives qui ont permis de l'obtenir ou une configuration partielle car l'association « 20 kg – Nicolas » n'est pas nécessaire

3 Réponse correcte avec la configuration complète, mais une description peu claire ou incomplète du raisonnement suivi (par exemple quelques déductions) ou seulement une vérification de l'adéquation de la configuration aux données de l'énoncé.

2 Réponse correcte sans explications

1 Début de raisonnement correct ou réponse erronée mais avec quelques associations correctes
ou réponse partielle : (Mario a tenu le stand le samedi) ou (Mario a vendu 21 kg de châtaignes)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

15. UNE CURE DE VITAMINES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Françoise doit suivre pour quatre semaines une cure de vitamine C, sous forme de comprimés de 180 mg. Elle devra prendre en tout 6300 mg de vitamine C.

Durant chaque semaine de sa cure, Françoise doit prendre chaque jour la même quantité de comprimés, selon les dosages qui varieront ainsi :

- la deuxième semaine, $\frac{3}{4}$ du dosage de la première semaine ;
- la troisième semaine, $\frac{2}{3}$ du dosage de la deuxième semaine ;
- la quatrième semaine, $\frac{1}{2}$ du dosage de la troisième semaine.

Combien de comprimés ou fraction de comprimé Françoise prendra-t-elle chaque jour de la première, de la deuxième, de la troisième et de la quatrième semaine de traitement ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer un partage (de 35) en quatre parties proportionnellement à 1 ; 3/4, 1/2 et 1/4 (après avoir exprimé ces parties, par des fractions des précédentes et transformé 6300 en 35 parts égales à 180 chacune)

Analyse de la tâche

- Comprendre que la cure a une durée quatre semaines, et que la posologie change chaque semaine ; que la masse totale de vitamines à prendre est connue : à savoir 6300 mg ou 35 pastilles de 180 mg, répartie selon les rapports entre les quantités à prendre par semaine.
- Procéder par essais, progressivement ajustés à partir des 6300 du total : par exemple, supposer que la quantité de la première semaine est de 1000 mg. Calculez 3/4 de 1 000 (750), 2/3 de 750 (500), 1/2 de 750 (375) et constater que : 1000 + 750 + 500 + 250 = 2500 mg, est nettement inférieur à 6300 mg. Les ajustements successifs peuvent aller jusqu'à 2 520 mg pour la première semaine : 2520 + 1890 + 1 260 + 630 = 6300.

  Puis calculer les quantités en comprimés par divisions par 180 : 6300 mg correspond à 35, 2520 à 14 puis 1890 à 10,5, 1260 à 7, et enfin la quatrième semaine, 630 à 3,5 ; puis par divisions par 7 pour les jours de la semaine et aboutir à

  2 ; 1,5 ; 1 et 0,5 comprimés, respectivement de la 1e à la 4e semaine.

  Cette procédure est longue, les essais s'organisent plus facilement si on part de 35 comprimés (6300 ÷ 180) pour les quatre semaines ou même de 5 comprimés (35 ÷ 7) par jour de chacune des quatre semaines.

Ou

- Chercher à exprimer les parts en partant de 1 pour celle de la première semaine, puis 3/4 pour la 2e semaine, puis (2/3)(3/4) = 1/2 pour la troisième et (1/2)(1/2) = 1/4 pour la quatrième et se rendre compte qu'il s'agit de répartir la dose totale (6300 mg ou 35 comprimés en quatre parts proportionnelles à 1 ; 3/4 ; 1/2 et 1/4 ou 4/4 ; 3/4 ; 2/4 et 1/4 , ou encore à 4 ; 3 ; 2 et 1, c'est-à-dire en 4 + 3 + 2 + 1 = 10 « quarts ». Une représentation graphique, par exemple à l'aide de segments, peut aider à comprendre cette répartition).
- Les 10 « petites parts » ou « quarts » du partage se calculent alors facilement 6300 ÷ 10 = 630 ou 35 ÷ 10 = 3,5 et l'on retrouve les résultats précédents.
- Il existe une grande variété de raisonnements analogues, après avoir, par exemple, transformé toutes les fractions en douzièmes, qui conduit à 10/12 pour le total des quatre parts, …

Ou

- par voie algébrique, avec x comme dose de la première semaine résoudre l'équation $x + 3/4x + 2/3\ (3/4x) = 6300$

  ou $x + 3/4x + 2/3\ (3/4x) + 1/2\ (2/3)\ (3/4x) = 35$ dont les solutions respectives sont 2520 ou 14.

  Il faut encore signaler que, quelle que soit la procédure, la difficulté du problème tient au passage entre les mg et les comprimés, puis entre les comprimés et les jours de la semaine, avec l'apparition de nombres décimaux ou de « demi-comprimés »

Attribution des points

4 Réponse correcte (2 comprimés par jour la première semaine, 1 comprimé et demi la deuxième semaine, 1 comprimé la troisième semaine et un demi comprimé la quatrième semaine) avec des explications claires et complètes (la stratégie par

essais doit présenter les calculs qui mettent en évidence la compréhension des différentes relations ; dans la stratégie arithmétique, la signification de la fraction de la partie ou de la totalité considérée doit être spécifiée ; la stratégie graphique doit montrer avec précision la représentation des données relationnelles ; dans la stratégie algébrique, la signification de l'inconnue doit être indiquée)

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes (par exemple, dans les essais seuls les totaux trouvés sont indiqués ou dans la représentation graphique les segments sont dessinés de manière imprécise)

ou calcul correct du nombre total de pilules pour chaque semaine avec la procédure correcte, sans calcul de la posologie quotidienne

2 Réponse correcte sans explication ni justification

ou procédure correcte avec explication claire et complète, mais erreur de calcul

ou calcul correct de la posologie en mg de chaque semaine avec la procédure correcte, sans calculer la posologie quotidienne ni en mg ni en comprimés

1 Début correct de la recherche (par exemple : relations entre les données comprises et représentées correctement ; équation écrite mais non résolue ; procédure par essais bien comprise mais sans parvenir à la réponse correcte).

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Puglia

16. À TROIS, C'EST PLUS VITE FAIT (Cat. 8, 9, 10)

Monsieur Seguin a un petit terrain qui entoure sa villa sur lequel il a semé du gazon.

Chaque fois que le gazon a 10 cm de hauteur, il faut le tondre.

Monsieur Seguin n'a pas de tondeuse, mais il a une chèvre, Blanchette, un mouton, Frisé, et une vache, Hortense.

Lorsqu'il met Blanchette, seule, sur son gazon à tondre, celle-ci met 6 heures pour le brouter entièrement.

Frisé est un peu plus rapide et met 4 heures pour brouter tout le gazon à lui seul.

Hortense, seule, broute tout le gazon en 3 heures.

Un beau jour, le gazon a poussé, il faut le tondre et M. Seguin est pressé. Il met ses trois animaux ensemble sur son gazon.

Combien de temps mettront ensemble, Blanchette, Frisé et Hortense, pour brouter tout le gazon.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et donnez le détail de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer la durée d'une tâche à effectuer par 3 animaux ensemble, connaissant le temps que chacun d'eux met pour effectuer seul la tâche (3 h, 4 h et 6 h).

Analyse de la tâche

- Comprendre que le temps va diminuer si les trois animaux broutent ensemble et que chacun broutera une partie du gazon au même rythme (vitesse) que lorsqu'il est seul. Pour pouvoir comparer ces rythmes, il faut penser à une unité commune de temps. Par exemple, penser que si B met 6 heures, en une heure elle broute un sixième du gazon, que F broute un quart du gazon par heure et H un tiers du gazon par heure. Puis faire appel à l'addition pour déterminer le rythme des trois animaux ensemble.
- Passer aux écritures puis aux opérations :

  En « gazon à tondre par heure », les trois vitesses sont 1/6, 1/4 et 1/3 et leur somme est 1/6 + 1/4 + 1/3 = 9/12 = 3/4 et pour trouver le temps nécessaire pour tondre « le gazon » à raison de 3/4 de « gazon à l'heure » il faut effectuer la division 1 : 3/4 = 4/3 en « heures ».

  Pour ceux qui ne maîtrisent pas l'addition des fractions ou qui ne perçoivent pas la division, une représentation graphique ou verbale peut aider à constater que si, en une heure on a fait trois parties de la tâche (3/4) et qu'il reste une partie (1/4) à effectuer, il suffira d'un tiers d'heure pour effectuer cette partie restante.
- Algébriquement, en choisissant le temps nécessaire (x, en heures) comme inconnue, l'équation correspondante est $x/6 + x/4 + x/3 = 1$, dont la solution est $x = 12/9 = 4/3$ ou $1 + 1/3$ ou 1h 20 minutes

Attribution des points

4 Réponse correcte (1 heure et 20 minutes ou 80 minutes ou 4/3 d'heure) avec description claire de la démarche et les calculs correspondants

3 Réponse correcte avec description peu claire ou calculs incomplets

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse imprécise (proche de 80 minutes ou imprécision dans le passage entre fractions et heures et minutes) avec description de la démarche

1 Début de démarche correct avec estimations et perception de la somme des « vitesses » par heure

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Riva del Garda

17. LE TANGRAM DU MENUISIER (II)(Cat. 8, 9, 10)

Un menuisier construit des Tangram* en bois.

Un jour, son frère, mathématicien, le défie en lui demandant combien mesurerait le côté du Tangram si le côté du petit carré avait *u* comme mesure.

Exprimez la mesure du côté du Tangram si la mesure du côté du petit carré est *u*.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse et décrivez en détail comment vous avez procédé.

** Le Tangram (voir photo) est un puzzle très connu, originaire de la Chine ancienne. Il s'agit d'un grand carré constitué de sept pièces, dont un petit carré, permettant de réaliser de très nombreuses figures.*

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

En partant de la photo d'un Tangram et de ses sept pièces, trouver la mesure du côté du Tangram en sachant que le côté du petit carré mesure u.

Analyse de la tâche

- Observer les sept pièces de la photo : passer des objets aux figures géométriques, les analyser, les décomposer en polygones et segments, « imaginer » les relations entre leurs aires et longueurs, les reconstruire mentalement ou par une construction effective sur une feuille.
- Recourir à une déduction « élémentaire » : en observant par exemple que les angles que la diagonale du grand carré divise en deux, mesurent 45 degrés et que le petit triangle en haut à droite a un angle de 45 degrés, un angle droit et qu'il est donc un triangle rectangle isocèle, idem pour l'autre petit triangle. Puisque le petit carré a son côté qui mesure u et l'aire u^2, les deux petits triangles ont deux côtés de longueur u et leur aire $1/2\ u^2$, l'hypoténuse du petit triangle est égale à la diagonale du petit carré ($u\sqrt{2}$), le quadrilatère a deux côtés égaux à l'hypoténuse du petit triangle et deux côtés égaux au côté du petit carré (c'est un parallélogramme), le triangle moyen a son hypoténuse qui mesure u (deux fois le côté du carré) et le est divisé en 2 triangles rectangles isocèles par une médiane, qui ont deux côtés de longueur u et on retrouve un petit triangle.
- Déduire la mesure du côté du Tangram : $2\ \sqrt{2}u$ ou $\sqrt{8}\ u$ ou encore une approximation de $2{,}83\ u$.

Ou, avec le recours à d'autres déductions « élémentaires » montrer que la moitié du côté du Tangram est égale à la mesure de la diagonale du petit carré. En fait, si l'on considère l'axe de symétrie (qui passe évidemment par le centre) du grand carré parallèle au côté horizontal du Tangram, la moitié de cet axe de symétrie coïncide avec la diagonale du petit carré qui a deux côtés sur les deux diagonales. Puisque la diagonale du petit carré est égale à $u\sqrt{2}$, la mesure du côté du tangram sera $2\sqrt{2}\ u$ ou $\sqrt{8}\ u$ …

Ou, comprendre que l'on peut déduire le côté du Tangram de son aire, aire qui peut se calculer à partir des aires de ses pièces (voir ci-dessus) : petit carré u^2, petits triangles $1/2\ u^2$ chacun, le triangle moyen est aussi rectangle isocèle partagé par la diagonale du grand carré en deux triangles égaux au petit triangle d'aire $1/2\ u^2$. Si le parallélogramme est partagé en deux, avec les considérations précédentes on voit encore deux petits triangles égaux aux précédents. Sa surface est donc u^2. L'aire de la moitié du carré est donc : $u^2 + u^2 + u^2 + 1/2\ u^2 + 1/2\ u^2 = 4\ u^2$.

La superficie totale est donc de $8\ u^2$.

Ou, encore à partir des "déductions" précédentes, voir que le grand carré est composé de 16 petits triangles, ce qui donne une superficie totale de $1/2\ u^2 \times 16 = 8\ u^2$. La mesure du côté du Tangram est alors $\sqrt{8}u$ ou $2\ \sqrt{2}u$.

Il y a évidemment de nombreuses variantes faisant combinant certaines de ces procédures, par mesure directe, par calcul des longueurs ou à partir des aires.

Attribution des points

4 Réponse correcte (la mesure du côté du Tangram est environ 2,83 *u* ou $\sqrt{8}$ *u* ou $2\sqrt{2}$ *u*) avec une explication détaillée de la procédure (quelques relations entre les côtés des pièces, remarquer que les triangles sont isocèles rectangles, ou autre déductions « élémentaires » comme celles de l'analyse de la tâche)

3 Réponse correcte avec une explication non détaillée de la procédure, mais qui montre certaines relations entre côtés et aires des pièces

2 Réponse correcte sans les détails de la procédure

ou une réponse basée sur une valeur particulière de *u*, mais avec tous les détails corrects et cohérents qui montre certaines relations entre côtés et aires des pièces

1 Réponse avec une recherche correcte qui s'arrête à l'aire du Tangram (8 u^2) sans détails

ou réponse à partir d'une valeur particulière de *u*, mais avec peu de détails

ou début de recherche correct avec quelques considérations sur les pièces de Tangram

0 Incompréhension du problème

ou réponse avec des mesures erronées des côtés et des aires des figures qui apparaissent sur le Tangram

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : GTGP (Groupe de travail Géométrie plane)

18. COMME VOUS AVEZ DE GRANDES JAMBES … (II) (Cat. 9, 10)

Le Loup et le Petit Chaperon Rouge se croisent dans la forêt. Ils se saluent et chacun se dirige vers la maison de la grand-mère.

Le Loup rit, très satisfait :

Ah ! Ah ! Ah ! Ah ! Le Petit Chaperon Rouge fait deux pas pendant que je fais un bond qui vaut trois de ses pas, j'arriverai bien avant elle !

De son côté, le Petit Chaperon Rouge semble aussi très satisfaite :

Cette fois-ci, le vieux tricheur ne pourra pas arriver avant moi parce que je connais un raccourci et que le chemin que suivra le loup est plus long.

En effet, le chemin qu'emprunte le loup est bien plus long : sa mesure est égale à celle du raccourci plus les deux tiers de ce raccourci.

Quand le premier arrivera chez la grand-mère, quelle fraction de son chemin restera-t-il à parcourir à celui qui arrivera le second ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer la durée nécessaire pour parcourir une distance mesurée en pas, à une vitesse de deux pas par unité de temps, à la durée nécessaire pour parcourir, à une vitesse de trois pas par unité de temps, une longueur correspondant à la première distance augmentée de ses deux tiers. Calculer ensuite la fraction de chemin restant à parcourir sur une de ces distances lorsque l'autre a été parcourue complétement.

Analyse de la tâche

- Comprendre les données de l'énoncé en s'appuyant éventuellement sur un schéma :
  - La longueur d'un bond du loup est de 3 pas ;
  - Le Petit Chaperon Rouge (PCR) parcourt une distance de deux pas dans la durée pendant laquelle le loup effectue un bond ;
  - la longueur du chemin emprunté par le loup est cinq tiers de fois celle du raccourci.
- Faire des essais de calculs :
  - en donnant des valeurs à la longueur du raccourci (par exemple 300 pas) trouver que le PRC le parcourt en 150 unités de temps pendant lesquelles le loup fait l'équivalent de 15 × 3 = 450 pas à comparer à la longueur totale de son chemin ((300 pas + 2/3 × 300 pas = 500 pas), conclure que c'est le petit chaperon rouge qui arrivera le premier et constater qu'il reste au loup encore à parcourir un dixième de cette longueur totale. (50 pas/500 pas). Refaire le même constat avec d'autres valeurs sans parvenir à le prouver dans le cas général.

  Ou, en donnant d'abord des valeurs à la longueur du chemin emprunté par le loup (par exemple 600 pas). En déduire la longueur du raccourci en remarquant (par exemple sur un schéma) que sa longueur correspond à 3/5 de longueur totale du chemin (360 pas). Calculer la durée en unités de temps pour parcourir ces parcours (200 pour le chemin ; 180 pour le raccourci) pour en conclure que le PRC arrivera le premier et qu'il restera au loup 20 bonds à faire sur les 200 de son chemin soit un dixième de son chemin. Refaire le même constat avec d'autres valeurs sans parvenir à le prouver dans le cas général

  Ou, en donnant d'abord des valeurs à la longueur du chemin emprunté par le loup (par exemple 600 pas). En déduire la longueur du raccourci en remarquant (par exemple sur un schéma) que sa longueur correspond à 3/5 de longueur totale du chemin (360 pas). Calculer la durée en nombre de bonds nécessaires pour parcourir ces chemins (200 bonds pour le chemin ; 180 pour le raccourci) pour en conclure que le petit chaperon rouge arrivera le premier et qu'le restera au loup un dixième du parcours à effectuer ((600 – 3 × 180) /600 = 60/600). Refaire le même constat avec d'autres valeurs sans parvenir à le prouver dans le cas général.

Ou, conduire un raisonnement déductif : remarquer que sur une même durée le loup parcourt une fois et demie le nombre de pas du PCR que par conséquent il aura parcouru une fois et demie la longueur du raccourci quand le petit chaperon rouge l'aura parcouru en entier. En déduire que, comme 2/3 est supérieur à 1/2, le petit chaperon rouge arrivera le premier.

Puis : en déduire qu'il restera au loup à parcourir (2/3 – 1/2 = 1/6 de la longueur du raccourci à parcourir. Calculer ensuite le rapport entre cette fraction de raccourci et la longueur totale du chemin emprunté par le loup (1/6 : 5/3 = 3/30) pour en conclure qu'il reste au loup encore un dixième de son chemin à parcourir.

Ou, après avoir remarqué (par exemple sur un schéma) que la longueur du raccourci correspond à 3/5 de longueur totale du chemin emprunté par le loup, calculer la portion de ce chemin parcourue par le loup (1 fois et demie les 3/5 du chemin ($3/5 + 1/2 \times 3/5 = 9/10$)) et en déduire qu'il lui reste 1/10 de son chemin à parcourir

Attribution des points

4 Réponse correcte (lorsque le petit chaperon rouge arrive, le loup a encore un dixième de son chemin à parcourir) avec des explications claires présentant le raisonnement suivi pour monter que la solution trouvée est générale.

3 Réponse correcte avec des explications partielles, ou au moins deux essais de calculs à partir desquels la réponse a pu être conjecturée et vérifiée

2 Réponse correcte sans explications

ou réponse erronée due à une erreur de calcul avec un raisonnement correct

1 Début cohérent de recherche (par exemple raisonnement correct conduisant à montrer que le petit chaperon rouge arrivera la première)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

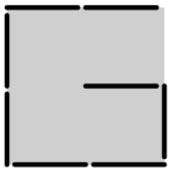
Origine : Milano

19. LA SPIRALE DE CURE-DENTS (II) (Cat. 9, 10)

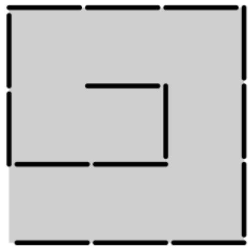
Avec des cure-dents Guy construit, sur un même modèle, des spirales qui s'inscrivent dans des carrés de plus en plus grands.

Ses quatre premières spirales sont représentées ci-dessous.

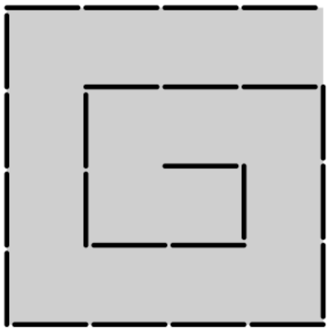
Longueur du côté du carré : 2 cure-dents



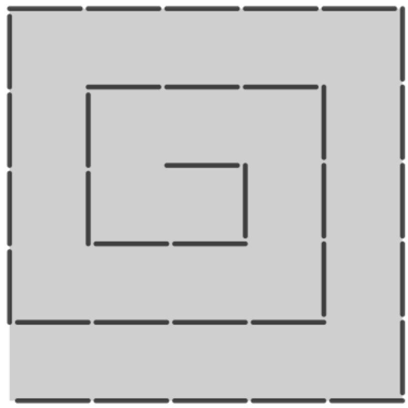
Longueur du côté du carré : 3 cure-dents



Longueur du côté du carré : 4 cure-dents



Longueur du côté du carré : 5 cure-dents



De combien de cure-dents Guy a-t-il besoin pour former sur le même modèle une spirale qui s'inscrit dans un carré de 50 cure-dents de côté ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le 50e terme d'une suite de nombres 3 ; 8 ; 15 ; 24 ; 35 ; … (à déterminer à partir du dénombrement de cure-dents organisées en spirales successives).

Analyse de la tâche

- Analyser les dessins de spirales pour identifier le modèle sur lequel elles sont constituées en partant du côté du carré (3 segments ayant pour longueur le côté du carré n, 2 segments de longueur (n - 1), 2 segments de longueur (n - 2) , …., 2 segments de longueur 1) ou inversement en partant du centre.
- Faire la somme des cure-dents de chaque spirale et en construire éventuellement quelques autres pour trouver les premiers termes de la suite et les organiser progressivement (voir exemple des deux premières lignes du tableau suivant)

dimension de la spirale (n)	2	3	4	5	6	7	8	9	10	...	50
cure-dents (N)	8	15	24	35	48	63	80	99	120	...	2600
écart d'un terme au suivant	7	9	11	13	15	17	19	21	23	...	
produit : $n \times (n + 2)$	2×4	3×5	4×6	5×7	6×8	7×9	8×10	9×11	10×12	…	50×52
repérage sur les « carrés »	9-1	16-1	25-1	36-1	49-1	64-1	81-1	100-1	121-1		2601-1

Passer en mode numérique et comprendre la logique qui permet de compléter le tableau sans dessiner les spirales :

- Soit observer qu'on peut passer d'un nombre au suivant en ajoutant les nombres impairs successifs à partir de 7 (3e ligne). Cette méthode exige une cinquantaine d'additions successives
- Soit en remarquant que le nombre de cure-dents (N) est le produit de deux nombres qui diffèrent de 2 : n et n + 2. Il s'agit de la fonction qui permet de passer directement de la dimension de la spirale au nombre de cure-dents N = n(n + 2)

- Soit en repérant que la suite des carrés de la dimension N de la spirale augmentée de 1 donne la suite des carrés des entiers (n + 1)2 : 9, 16, 25, 36, 49 et en constatant que les nombres de cure-dents valent 1 de moins que ces carrés. Il s'agit aussi d'une fonction qui permet de passer directement de la dimension de la spirale au nombre de cure-dents N = (n + 1)2 - 1
- …

  (Les formules $(n + 1)^2 - 1 = n(n + 2)$ peuvent aussi être obtenue à partir de l'analyse de la spirale de côté n mentionnée précédemment, de la connaissance de la formule qui donne la somme des n - 1 premiers nombres naturels et de connaissances algébriques sur le calcul littéral)

Attribution des points

4 Réponse correcte (2600 cure-dents) avec des explications claires présentant le raisonnement suivi pour montrer que la solution trouvée est générale ou trouvée à partir d'une conjecture basée sur l'étude d'au moins 5 spirales.

3 Réponse correcte (2600 cure-dents) avec des explications partielles ou pas suffisamment étayées.

2 Réponse erronée avec identification d'une règle qui permet de calculer les termes de la suite
ou réponse correcte sans explications

1 Début cohérent de recherche (par exemple dessin d'une cinquième spirale)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Luxembourg

20. BEAUCOUP DE ZÉROS (Cat. 9, 10)

Georges, Fréderic et Anselme ont inventé un jeu :

Chaque joueur doit choisir quelques-uns des nombres naturels de 1 à 30, autant qu'il en veut, mais tous différents ; puis calculer le produit des nombres choisis.

Le gagnant est celui qui obtient le produit qui se termine par le plus grand nombre de zéros.

Dans le cas où plusieurs joueurs obtiennent des produits qui ont le même nombre de zéros, le gagnant est celui dont le produit est le plus petit.

Par exemple :

- Georges choisit 24 ; 10 ; 15 et obtient 24 x 10 x 15 = 3 600
- Fréderic choisit 28 ; 5 ; 10 ; 15 et obtient 28 x 5 x 10 x 15 = 21 000
- Anselme choisit 3 ; 8 ; 20 ; 25 et obtient 3 x 8 x 20 x 25 = 12 000

C'est Anselme qui gagne car son produit 12 000 se termine par trois zéros comme celui de Frédéric, mais il est plus petit que 21 000. En revanche, Georges, a le plus petit produit mais qui se termine par deux zéros seulement !

Quels sont les nombres qu'il faut choisir pour être sûr de gagner à ce jeu ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le plus petit produit formé de facteurs différents choisis parmi les nombres naturels de 1 à 30 dont l'écriture se termine par un maximum de zéros.

Analyse de la tâche

- Se rappeler la définition d'un « produit » de plusieurs nombres (en examinant les exemples de l'énoncé) et se rendre compte qu'il y a un très grand nombre de produits composés des facteurs de 1 à 30 ; de deux facteurs, trois facteurs … jusqu'au dernier de 30 facteurs. Parmi tous ces produits, il faudra s'intéresser qu'à ceux qui se terminent par des zéros.
- Identifier quelques produits possibles se terminant par un zéro, deux zéros, trois zéros … (par exemple 10 × 20 × 30 = 6 000) et se demander à partir d'exemples identifiés, si on peut obtenir des produits avec plus de zéros (par exemple, en multipliant 6 000 par 5 on trouve 6 000 × 5 = 30 000 qui a un zéro de plus),
- Poursuivre ainsi les essais dans la recherche de produits avec un plus grand nombre de zéros que les précédents (par exemple en multipliant 30 000 par 15 on obtient 30 000 × 15 = 450 000 toujours avec quatre zéros mais en multipliant ce dernier par un nombre pair (12) on trouve 450 000 × 12 = 5 400 000 qui a cinq zéros)
- Ainsi de suite, poursuivre les essais et se convaincre peu à peu qu'il faut utiliser tous les multiples de 5 à disposition (5, 10, 15, 20, 25 et 30) avec quelques multiples de 2, pour obtenir le plus petit produit. Parmi les six multiples de 5 remarquer que 25 multiplié par un multiple de 4 est un multiple de 100, qui apporte deux zéros supplémentaires. En conclure qu'il y a sept fois le facteur 5 dans les nombres de 1 à 30 et que, par conséquent, on ne pourra pas trouver de produits se terminant par plus de sept zéros.
- En multipliant le produit 5 × 10 × 15 × 20 × 25 × 30 = 11 250 000 par 2 on obtient : 22 500 000, si on le multiplie par 4 on obtient : 45 000 000, et par 8 on obtient : 90 000 000. Il faut donc choisir les six multiples de 5 puis 2 et 4 ou seulement 8 pour obtenir 90 000 000, qui se termine par sept zéros.

Ou

En faisant appel aux propriétés de la multiplication (associativité et commutativité) puis à la décomposition d'un nombre en facteurs premiers, (ici 2 et 5) : sachant que l'existence d'un zéro en fin de produit exige la présence d'un facteur 10 ou d'un facteur 2 et d'un facteur 5, chercher les facteurs 5 dans les nombres de 1 à 30, en trouver 7, (un dans 5, 10, 15, 20, 30 et deux dans 25) et chercher 7 facteurs 2. Comme il y en a déjà 4 dans 10, 20 et 30, il suffit d'en trouver 3 autres, soit dans 8, soit dans 2 et 4. En conclure que le produit « gagnant » est 90 000 000, sous l'une de ses deux formes : 90 000 0 = 5 × 10 × 15 × 20 × 25 × 30 × 8 = 5 × 10 × 15 × 20 × 25 × 30 × 2 × 4

Attribution des points

4 Une des solutions, 2 ; 4 ; 5 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30 ou 5 ; 8 ; 10 ; 15 ; 20 ; 25 ; 30, avec la vérification 90 000 000 et une description claire de la démarche, soit par essais successifs, soit par des raisonnements sur la factorisation des nombres contenant les facteurs 2 et 5 dans leur décomposition

3 Une des solutions avec explications peu claires ou incomplètes conduisant cependant à la détermination des 7 zéros

ou une autre solution avec 7 zéros, bien argumentée, mais qui n'est pas optimale (par exemple 360 000 000)

2 Un nombre avec 6 zéros finaux, justifié par la présence d'essais, même peu clairs et peu structurés

ou réponse correcte, avec les facteurs et 90 000 000 mais sans explication

1 Début de recherche par quelques essais qui témoignent de la reconnaissance des facteurs 2 et 5 dans la production des zéros finaux et conduisant à un produit se terminant au minimum par trois.

0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma