

	Titre	Catégories	Origine	Domaine
1	Le dé de Pablo	3 4	GTGE	Géométrie 3D : identification des faces sur un patron de cube
2	Ronde de nombres	3 4	AO	Arithmétique : décomposition en facteurs
3	Tous assis	3 4	8.I.01	Arithmétique: multiples de 2 ou de 3
4	Le coffre-fort	3 4 5	RV	Logique : combinaison à 3 chiffres avec contraintes de données
5	Vous ne perdez jamais !	3 4 5	SI	Arithmétique : décomposition additive d'un nombre
6	Les tétralvéoles	4 5 6	SR	Géométrie plane : dessin de figures composées d'hexagones sur une grille
7	L'anniversaire de Luc	5 6 7	UD	Arithmétique : recherche d'un nombre satisfaisant à des conditions données
8	Un peu de foot	5 6 7	FC	Arithmétique : décomposition de 38 en somme de termes 0, 1, 3
9	Les friandises de grand-mère Paulette	5 6 7	GTAL	Pré-algèbre : trouver trois nombres satisfaisant à des relations données
10	Pendentifs en or	5 6 7	RZ	Mesures : comparer les aires de trois figures concaves non polygonales
11	La bergerie du berger Arthur	6 7 8	MI	Mesures : partager un rectangle en deux parties d'aires proportionnelles à 1 et 2
12	Friandises de Noël	6 7 8	BB	Arithmétique : trouver deux nombres entiers satisfaisant à des relations données
13	Pompes	7 8 9 10	SI	Arithmétique : trouver le nombre de termes d'une suite arithmétique
14	Des dés étranges	8 9 10	GTGE	Géométrie 3D : inscrire des nombres sur les faces d'un dé satisfaisant à certaines conditions
15	Jeu hexagonal	8 9 10	SR	Géométrie plane : paver une figure trouée formée d'hexagones avec des assemblages de quatre hexagones
16	Escalier de cubes	8 9 10	GTGE+GP	Géométrie 3D : dans un escalier de cube colorés trouver la couleur des cubes de base
17	Goûter mis en jeu	8 9 10	SR	Logique : possibilités d'obtenir deux cartes de même couleur parmi quatre cartes
18	La confiture de myrtilles	9 10	CB	Proportionnalité : calcul d'un pourcentage
19	La table du grand-père	9 10	MI	Géométrie plane : comparer les aires de deux couleurs différentes dans un pavage

1. LE DÉ DE PABLO (Cat. 3, 4)

Pablo veut jouer avec son grand-père, mais il leur manque un dé.

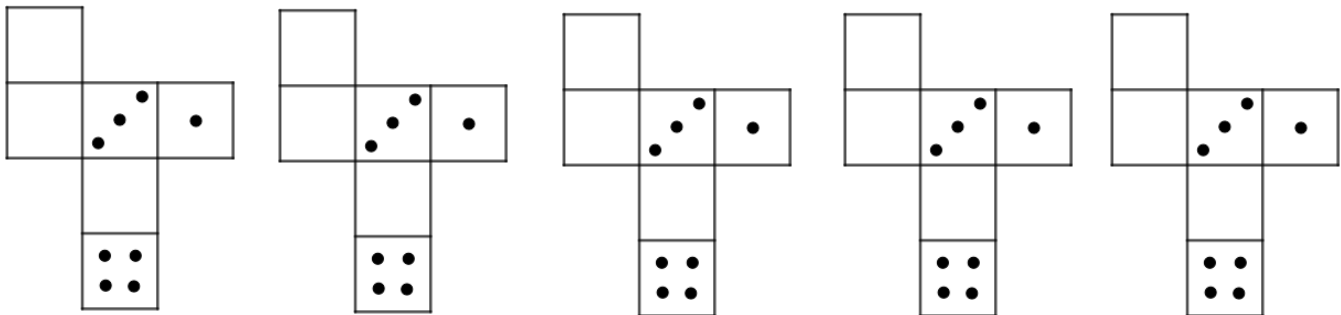
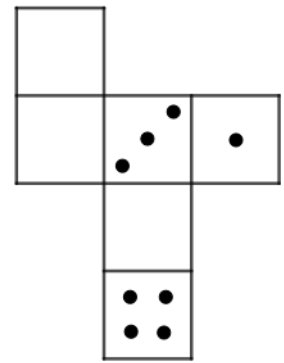
Le grand-père a proposé d'en fabriquer un en carton. Ils partent du patron qui est représenté à droite et sur lequel les points de trois des faces du dé ont déjà été dessinés.

Le grand-père rappelle à Pablo que sur un dé, on a la règle suivante : quand on additionne les points de deux faces opposées, on trouve toujours 7.

Marquez sur les patrons ci-dessous les points manquants sur les autres faces pour terminer le dé.

Montrez toutes les solutions possibles.

Vous n'êtes pas obligés d'utiliser tous ces patrons.



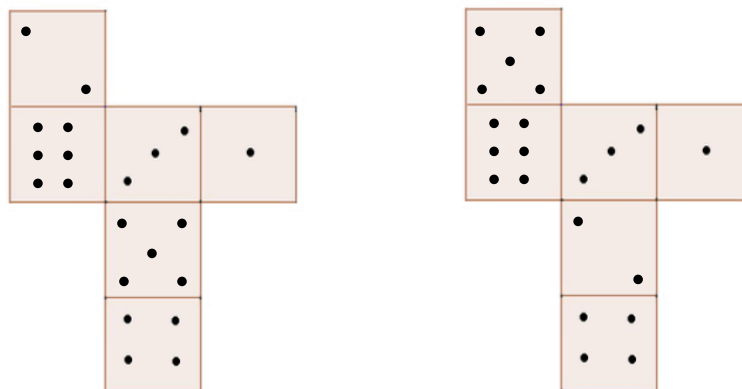
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Repérer les faces opposées d'un cube sur un patron plan et reconnaître les compléments additifs à 7.

Analyse de la tâche

- Comprendre comment construire un cube à partir du patron proposé.
- Identifier les paires de faces opposées (en imaginant ou en utilisant un dé construit).
- Garder à l'esprit la règle pour placer les points sur les faces des dés et noter que les 3 points et les 4 points sont sur des faces opposées, tracer 6 points sur la face opposée à 1.
- Comprendre que sur les deux faces restantes, identifiées comme opposées, il faut dessiner 2 et 5 points ; alors il y aura deux possibilités pour la position des 2 et 5 points.
- Dessiner les deux possibilités :



Remarque : l'orientation spatiale des points de 3, 2 et 6 n'est pas prise en compte, comme cela se produit en réalité et il n'est donc pas nécessaire que les élèves fassent cette distinction. Par conséquent, elle n'est pas prise en compte dans l'attribution des points.

Attribution des points

- 4 Dessins des deux réponses possibles
- 3 Dessins des 2 réponses correctes avec une autre erronée
- 2 Dessin d'une seule réponse correcte sans autre erronée
- 1 Dessin d'une réponse correcte et une ou deux erronées
ou pas de dessin, mais une phrase comme « deux faces opposées doivent avoir 5 et 2 points et la face opposée à celle avec un point doit avoir 6 points »
- 0 Incompréhension du problème.

Niveaux : 3, 4

Origine : Groupe géométrie 3D (GTGE)

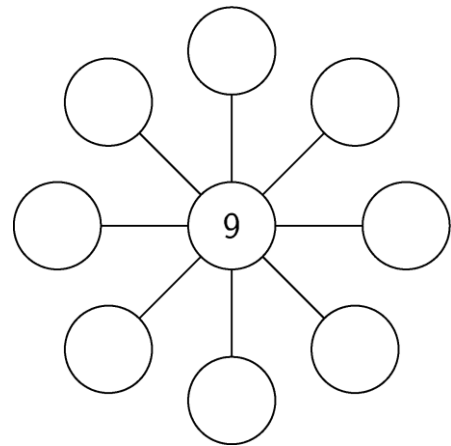
2. RONDE DE NOMBRES (Cat. 3, 4)

La figure ci-contre représente un cercle avec le nombre 9, entouré de huit cercles. Ces cercles sont alignés deux à deux avec celui qui contient le nombre 9. Par exemple le cercle du haut et le cercle du bas sont alignés avec le 9.

Claude veut inscrire dans ces huit cercles des nombres entiers tous différents, de telle sorte que si on multiplie entre eux deux nombres alignés avec le 9 et si on multiplie le résultat par 9, on obtient toujours 216.

Complétez la figure en respectant cette règle.

Montrez les calculs que vous avez faits pour trouver votre réponse.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

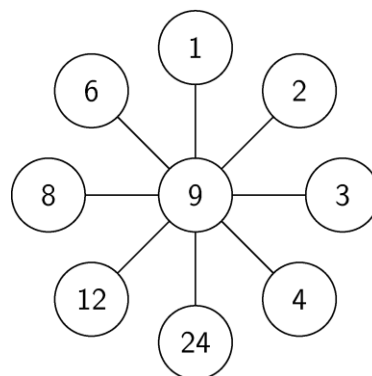
Trouver huit nombres entiers différents, facteurs deux à deux de quatre produits, chacun d'eux valant 24.

Analyse de la tâche

- Observer qu'il y a 4 paires de cercles alignés avec le cercle 9.
- Comprendre qu'il faut trouver, pour chaque paire de cercles alignés avec le 9, deux nombres dont le produit, multiplié par 9 donne 216.
- Comprendre qu'il faut diviser 216 par 9 et que le résultat (24) est le produit des deux nombres inscrits dans une paire de cercles alignés avec le cercle central (9).
- Chercher tous les couples d'entiers différents dont le produit est égal à 24. Trouver qu'il existe seulement quatre couples qui répondent à la demande (1, 24) ; (2, 12) ; (3, 8) ; (4, 6).

Ou

- Constater que la figure peut ainsi être complétée en respectant la règle donnée, comme sur cet exemple.



Attribution des points

- 4 Figure correctement complétée avec l'explicitation des calculs
- 3 Figure correctement complétée mais sans montrer les calculs effectués ou bien, deux ou trois alignements correctement complétés avec des calculs explicites
- 2 Deux ou trois alignements correctement complétés sans explication des calculs
- 1 Un seul alignement correct
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Valle D'Aosta

3. TOUS ASSIS (Cat. 3, 4)

Dans une classe de 21 enfants la maîtresse dit :

« Nous allons faire un jeu. Vous devez vous mettre en cercle et voilà les règles à suivre :

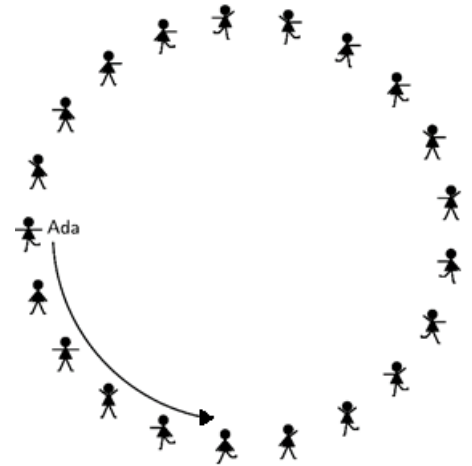
- Nous allons partir de Ada qui dira "un", son voisin ou sa voisine dans la direction indiquée par la flèche dira "deux", le suivant ou la suivante dira "trois" et ainsi de suite.

- Au moment où un enfant dit un nombre pair ou un multiple de 3 (2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 12...) il doit s'asseoir et ne dira plus rien jusqu'à la fin du jeu.

- Et ainsi de suite à chaque tour, les enfants restant debout continuent à compter de un en un avec la même règle.

- Le dernier enfant qui reste debout continue à compter jusqu'à ce qu'il dise le premier nombre qui lui permet de s'asseoir.

- Le jeu se termine quand tous les enfants sont assis ! ».



À la fin du premier tour, le dernier joueur avant Ada a dit "21" et s'est assis, mais le jeu continue avec les enfants qui sont restés debout. Ada dit "22" et s'assoit. Le joueur suivant parmi les joueurs restants debout dit "23" et reste debout.

Quel nombre dira le dernier enfant quand il devra s'asseoir ?

Montrez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Éliminer les multiples de 2 et les multiples de 3 dans une succession cyclique à partir du comptage de 21 éléments, dans un contexte de joueurs disposés en cercle.

Analyse de la tâche

- S'approprier la situation indiquée par la figure, garder à l'esprit la disposition en cercle ainsi que l'enfant à partir duquel commence la numérotation et le sens de rotation.
- Comprendre la règle du jeu, c'est-à-dire qu'au premier tour puis dans les suivants, la numérotation est effectuée uniquement par les enfants debout, qui doivent s'asseoir s'ils prononcent un multiple de 2 ou de 3.
- Rédiger une description chronologique de ce genre : le nombre 1 reste debout, le 2 s'assied, le 3 s'assied... le 11 reste debout, le 12 s'assied...
- Comprendre qu'après le premier tour seuls restent debout les enfants qui ont dit : 1, 5, 7, 11, 13, 17 et 19.
- Comprendre qu'il faut continuer avec un deuxième tour et celui qui avait dit 1 dit 22 et s'assied ; celui qui avait dit 5 dit 23 et reste debout... Après le deuxième tour seuls restent alors debout les enfants qui ont dit 23 et 25 et au troisième tour, ils diront respectivement 29 et 30.
- Conclure qu'à la fin du troisième tour, un seul enfant reste debout, celui qui a dit 29, qui devra encore dire 31, et reste debout, et enfin 32, et s'assied.
- Procédure graphique On peut aussi marquer les nombres sur le dessin puis biffer les multiples de 2 ou 3, puis au second tour marquer les nombres à côté de ceux qui n'avaient pas été biffés, ...

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (32) avec une procédure claire (par exemple un dessin qui indique clairement le nombre de tours et les nombres éliminés à chaque tour)
- 3 Réponse correcte (32) avec une procédure qui présente des passages confus ou bien, réponse 30 ou 31 avec la procédure suivie
- 2 Réponse correcte qui ne présente aucune explication

- 1 Début de raisonnement qui conclut le premier tour avec la bonne élimination de tous les multiples de 2 ou de 3, y compris 2 et 3
ou bien, réponse 30 ou 31 sans la procédure suivie
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Inspiré du problème “*Le giratoire*”, 8.I.01.

4. LE COFFRE-FORT (Cat. 3, 4, 5)

Marco a oublié la combinaison qui ouvre son coffre-fort, mais il se souvient qu'elle est composée de trois chiffres différents et que le 0 n'y apparaît pas. Son coffre-fort a un écran où sont vus et commentés les essais effectués. Marco peut entrer au maximum 5 combinaisons fausses. Si la sixième n'est pas correcte le coffre-fort se bloque et il n'est plus possible de l'ouvrir. Marco a déjà fait 5 essais donnant les informations suivantes :

Combinaison insérée	Message lu sur l'écran
1 - 2 - 3	Tous les chiffres sont faux
6 - 1 - 2	Un seul chiffre est correct mais il est mal placé
4 - 5 - 6	Un seul chiffre est correct et il est bien placé
9 - 5 - 7	Un seul chiffre est correct mais il est mal placé
7 - 4 - 5	Un seul chiffre est correct mais il est mal placé

Quelle sera la combinaison correcte permettant d'ouvrir le coffre-fort ?

Expliquez comment vous êtes arrivés à trouver la solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre de trois chiffres tous différents à partir de cinq indications sur les chiffres « corrects » et/ou « bien placés ».

Analyse de la tâche

- Comprendre que la combinaison du coffre-fort est composée de 3 chiffres différents compris entre 1 et 9, qui doivent être déterminés et insérés dans l'ordre correct selon les indications de l'énoncé.
- Analyser les 5 essais proposés et observer que la première indication permet d'écarter les chiffres 1, 2 et 3.
- Comprendre à partir de la deuxième indication que 1 et 2 étant faux, 6 est le seul chiffre correct mais mal placé. En croisant cette information avec la troisième indication, déduire que 6 est en troisième position dans la combinaison recherchée et que 4 et 5 sont à écarter.
- La quatrième indication dit qu'un seul des chiffres 9, 5 et 7 est correct et mal placé. Comme 5 est exclu il y a incertitude entre 9 et 7.
- Déduire de la cinquième indication que 7 est le chiffre correct parce que 4 et 5 sont exclus, mais qu'il est mal placé. Donc, en confrontant cette indication avec la quatrième, découvrir que 7, ne peut être ni à la première ni à la troisième position, il occupera la position centrale et que 9 est à écarter.
- Se rendre compte que l'unique chiffre, parmi ceux que l'on recherche, qui peut être à la première position est 8, du moment que 1, 2, 3, 4, 5, et 9 sont exclus, 7 est le chiffre en position centrale et 6 celui en troisième position. Conclure que la combinaison est 8 7 6.

Ou

- Combiner une procédure par déductions avec une procédure par essais-erreurs, organisée ou non à partir de nombres de trois chiffres qui sont confrontés aux indications données.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (8-7-6 ou 876) avec la description détaillée de la démarche suivie pour arriver à la solution (les déductions qui permettent d'exclure un à un les chiffres à déterminer, ainsi que leur position, sont explicites)
- 3 Réponse correcte avec une description peu claire ou partielle de la démarche suivie (par exemple qui n'explique pas comment on arrive à exclure certains chiffres ou comment leur position correcte est trouvée)
- 2 Réponse correcte sans explications ou avec seulement la vérification montrant que les contraintes ont été respectées.
Ou deux seuls chiffres trouvés, avec un raisonnement correct
- 1 Début de recherche correct (par exemple : trois chiffres déterminés dont un seul correct)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine: Riva del Garda (d'après "Chasse au trésor", 19.II.14)

5. VOUS NE PERDEZ JAMAIS ! (Cat. 3, 4, 5)

Aldo joue aujourd'hui avec un nouveau jeu vidéo.

Chaque partie doit être terminée dans un temps déterminé.

Si la partie est finie dans le temps fixé, il gagne 10 points. Autrement, il gagne seulement 3 points.

Aujourd'hui, Aldo a obtenu 63 points.

Combien de parties Aldo a-t-il pu faire aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Trouver toutes les décompositions additives d'un nombre (63) de la forme $10n + 3m$.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le score obtenu après chaque partie est en fonction du respect ou non du temps imparti : 10 points si le temps a été respecté, sinon 3 points.
- Comprendre qu'on doit rechercher le nombre de parties jouées pour atteindre le score final et que ce score ne peut pas varier (il reste égal à 63)
- Observer qu'Aldo n'a pas terminé toutes les parties dans le temps imparti car le score final n'est pas un multiple de 10.
- Procéder par essais, par exemple choisir un nombre n de parties ayant rapporté 10 points, calculer le score ainsi obtenu et vérifier que la différence de ce nombre avec 63 est un multiple de 3 ($3m$). Si c'est le cas, additionner n et m pour trouver le nombre de parties jouées. En suivant cette procédure, il est possible d'oublier quelques solutions.

Ou

- Procéder par essais organisés en partant par exemple du nombre maximal de parties à 10 points qui ont pu être jouées : $63 = 60 + 3$ où 60 est le score obtenu grâce aux parties terminées dans le temps imparti (6) et 3 est le score qui peut être obtenu en jouant une partie à 3 points. Ainsi 7 parties (6 + 1) ont été jouées.
- Poursuivre la recherche en faisant l'hypothèse qu'un nombre inférieur de parties ont été jouées dans le temps imparti, par exemple 5, constater que la différence entre 63 et 50 est 13 qui n'est pas un multiple de 3 et écarter cette possibilité.
- Continuer ainsi et trouver les deux autres solutions possibles : 14 parties (3 parties à 10 points et 11 à 3 points) et 21 parties (0 partie à 10 points et 21 à 3 points).
- Au cours de la recherche, les élèves pourraient également observer la régularité qui permet d'identifier après les deux premières, l'autre solution possible : diminution de 3 du nombre de parties à 10 points et augmentation de 10 du nombre de parties à 3 points.


Attribution des points

- 4 Réponse correcte (7, 14, 21) avec une explication claire de la procédure suivie et le détail des calculs effectués
- 3 Réponse correcte avec une explication incomplète ou peu claire ou avec seulement une partie des calculs
ou les trois réponses possibles (6 parties dans le temps imparti et 1 partie en retard ; 3 parties dans le temps imparti et 11 parties en retard ; 0 partie dans le temps imparti et 21 parties en retard) données avec une procédure claire, sans calculer le nombre total de parties
ou réponse incomplète (il manque une solution) avec une explication claire et complète
- 2 Réponse correcte sans explication, ni calcul
ou réponse partielle (une seule solution) avec une explication claire et complète
ou deux possibilités avec une procédure claire sans calculer le nombre total de parties
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple une décomposition correcte de 63)
- 0 Incompréhension du problème

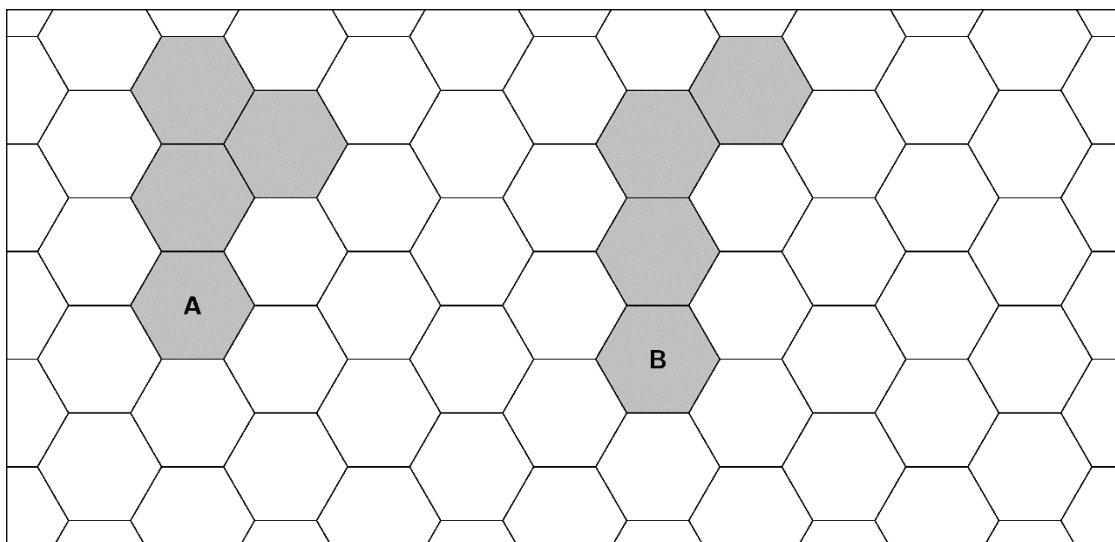
Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. LES TÉTRALVÉOLES (Cat. 4, 5, 6)

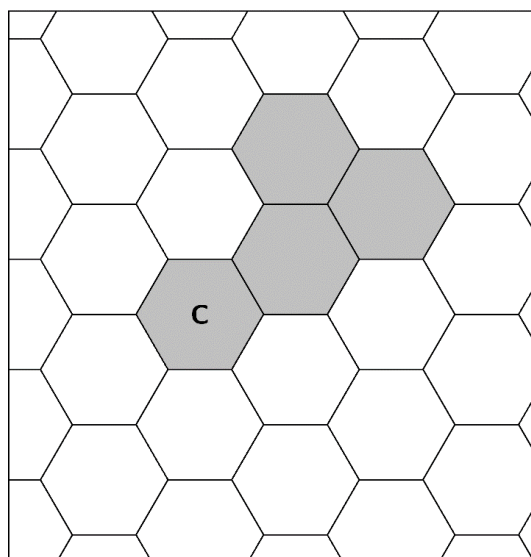
Un tétralvéole est une figure formée de 4 hexagones comme celui-ci : , reliés au moins par un côté.

Vous trouverez ci-dessous deux tétralvéoles différents, A et B, mais d'autres pourraient être dessinés, différents de ceux-ci et différents l'un de l'autre.

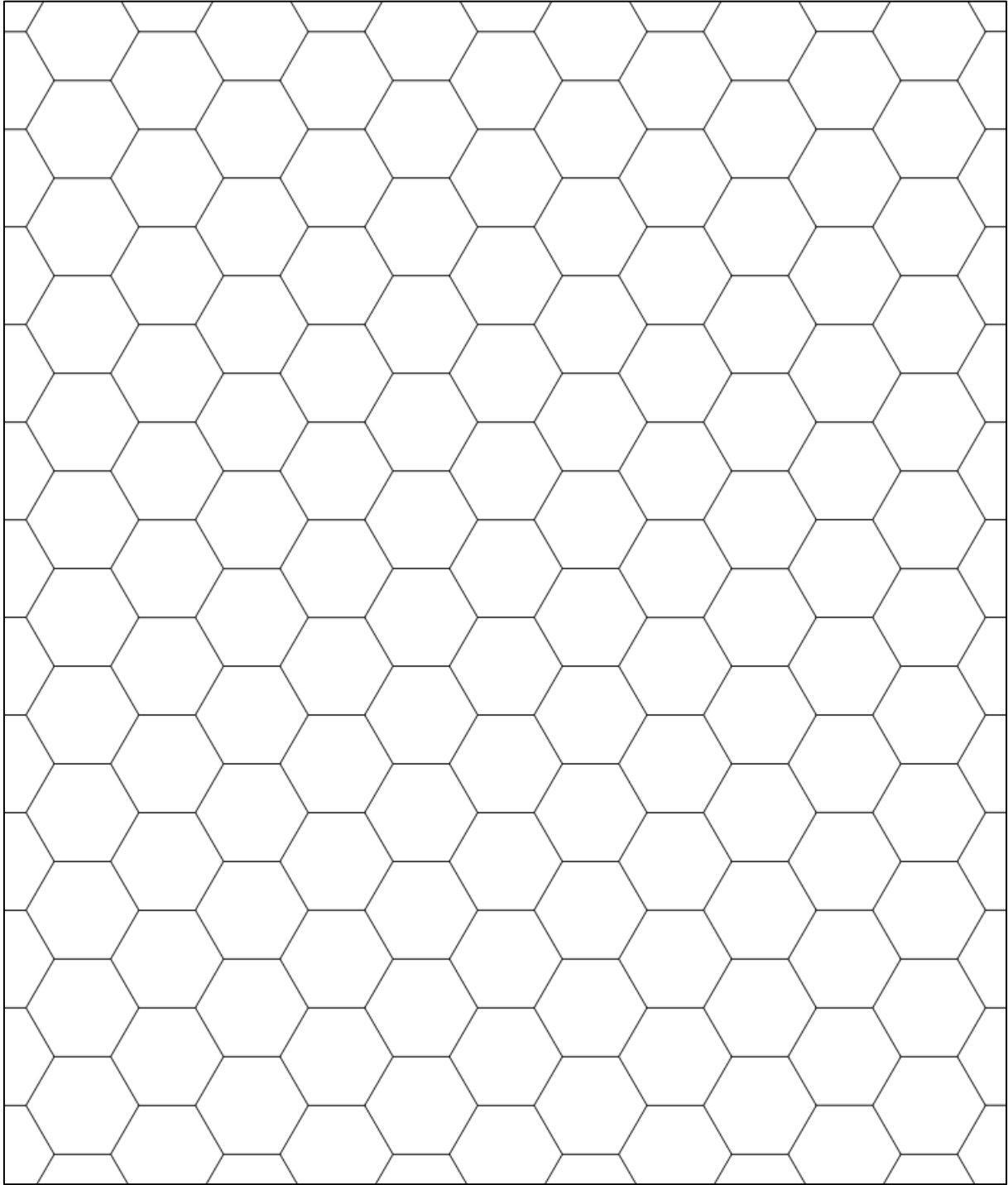


Deux tétralvéoles sont différents s'ils ne peuvent pas être exactement superposés, même en les faisant pivoter ou en les retournant.

Le tétralvéole C ci-dessous est identique au tétralvéole A car, s'il est retourné et pivoté, il se superpose parfaitement au tétralvéole A.



Dessinez sur la feuille jointe tous les autres tétralvéoles différents entre eux et différents de ceux qui sont déjà dessinés ci-dessus.



ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Déterminer toutes les figures non superposables composées de quatre hexagones réguliers ayant au moins un côté en commun.

Analyse de la tâche

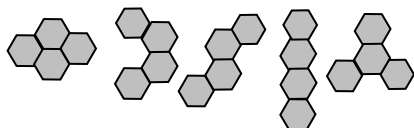
- Comprendre que chaque tétravéole est une figure composée de quatre hexagones accolés et que l'assemblage sur la feuille fournie ne peut être correct que s'ils sont reliés par un côté et pas seulement par les sommets ou des parties de côtés.
- Comprendre que tous les tétravéoles doivent être différents entre eux et qu'il est donc nécessaire de rechercher pour les éliminer les éventuelles figures qui se superposeraient après rotation ou retournement.
- Différentes stratégies peuvent être envisagées, par exemple, partir du tétravéole de l'exemple (ou en composer un nouveau) puis déplacer un ou plusieurs hexagones pour obtenir différentes formes.

Ou

- Travailler de manière systématique à partir, par exemple, de figures composées de deux ou trois hexagones en cherchant où ajouter les hexagones manquants.
- Vérifier pour chaque cas que la figure obtenue n'est superposable à aucune des autres figures déjà trouvées après une rotation ou un retournement.

Attribution des points

- 4 Dessin des 5 tétravéoles différents, autres que ceux déjà dessinés, sans doublon ni figure fausse



- 3 Dessin des 5 tétravéoles différents autres que ceux déjà dessinés, avec présence d'un doublon ou d'une figure fausse
- 2 Dessin des 5 tétravéoles différents avec doublon(s) et/ou figure(s) fausse(s) ou dessin de 3 ou 4 tétravéoles différents sans doublon et sans figure fausse
- 1 Dessin de 3 ou 4 tétravéoles différents avec doublon(s) et/ou figure(s) fausse(s) ou dessin de 2 tétravéoles différents avec ou sans doublon
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Suisse Romande

7. L'ANNIVERSAIRE DE LUC (Cat. 5, 6, 7)

Aujourd'hui c'est l'anniversaire de Luc.

Pendant la fête avec sa famille, il découvre que l'âge qu'il a aujourd'hui est le double de l'âge de sa cousine Sara et la moitié de l'âge de sa tante Florence.

La somme des âges de Sara et de Florence est égale à 60 ans.

Quel est l'âge de Luc aujourd'hui ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre n dont la somme de sa moitié ($n/2$) et de son double ($2n$) est 60, dans un contexte d'âges.

Analyse de la tâche

- Comprendre les données du problème : Luc a le double de l'âge de Sara et la moitié de l'âge de sa tante ; la somme de l'âge de Sara et de l'âge de la tante est égale à 60.
- Procéder par essais en faisant des hypothèses sur l'âge de Luc, et effectuer les ajustements successifs pour arriver à réaliser l'égalité : $n \div 2 + 2n = 60$, c'est-à-dire la somme des âges de Sara et de Florence. La recherche peut être facilitée en partant du fait qu'il s'agit d'un double, l'âge de Luc doit donc être pair, et il doit être inférieur à 30 ($= 60 \div 2$), puisque 60 contient le double de l'âge de Luc plus sa moitié. Dans la recherche s'arrêter au nombre 24 qui satisfait aux conditions, $24 \div 2 + 24 \times 2 = 60$.

Ou

- Prendre comme référence l'âge de Sara, et comprendre que son nombre d'années est contenu deux fois dans celui de Luc, et donc quatre fois dans celui de la tante Florence. Calculer donc l'âge de Sara, $60 \div (1 + 4) = 12$. Doubler l'âge de Sara pour trouver celui de Luc : $12 \times 2 = 24$. S'aider éventuellement d'une représentation graphique pour arriver à la solution.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (24 ans) avec une description claire du raisonnement (calculs, ou schéma, ou tests double + moitié = 60, ou...)
- 3 Réponse correcte mais avec une description peu claire ou comportant certains manques
ou réponse erronée en raison d'erreurs de calculs mais avec une description claire des différentes étapes de la recherche
ou réponse correcte sur les âges de Sara et /ou Florence avec des explications claires, mais sans indiquer l'âge de Luc
- 2 Réponse correcte sans explication ou seulement une vérification
- 1 Début de recherche correcte (essais n'aboutissant pas au résultat)
ou réponse erronée en raison d'une confusion entre double et moitié
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Udine

8. UN PEU DE FOOT (Cat. 5, 6, 7)

Le championnat d'Espagne de football 2011-2012 opposait 20 équipes. Chaque équipe a rencontré deux fois chacun de ses adversaires (aller et retour) et, au cours de la saison, a joué 38 matchs en tout.

La règle d'attribution des points est la suivante :

- en cas de match nul, 1 point pour chaque équipe ;
- sinon, 3 points pour l'équipe gagnante et 0 point pour l'équipe perdante.

Voici le classement final des trois premières équipes :

	joués	gagnés	nuls	perdus	points
1. Real Madrid	38	32	4	2	100
2. Barcelone	38	?	?	?	91
3. Valence	38	?	10	?	61

Combien l'équipe de Valence a-t-elle perdu de matchs ?

Indiquez toutes les possibilités (matchs gagnés, matchs nuls, matchs perdus) qui permettraient à Barcelone d'obtenir 91 points.

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Complétez un tableau en recherchant trois nombres naturels dont la somme est 38 et dont la somme des produits du premier nombre par 3, du second nombre par 1, du troisième par 0 est égale aux nombres attendus (61 et 91). Pour 61, un des trois nombres est donné.

Analyse de la tâche

- Comprendre le tableau et vérifier, pour l'équipe du Real Madrid, que la somme des matchs gagnés, nuls et perdus est de 38 et que le score 100 est obtenu en multipliant le nombre de matchs gagnés par 3 et en ajoutant au résultat le produit de 1 par le nombre de matchs nuls et 0 pour le nombre de matchs perdus : $3 \times 32 + 1 \times 4 + 2 \times 0 = 100$.
- Comprendre que le nombre de matchs perdus ne modifie pas le total des points, que les points obtenus lors des matchs nuls correspondent à leur nombre.
- Dédurre que pour Valence, $61 - 10 = 51$ est le nombre de points obtenus pour les 17 matchs gagnés ($17 = 51 : 3$). Il y a 11 matchs perdus car $38 - (17 + 10) = 11$.
- Pour Barcelone, on peut procéder à partir du plus grand multiple de 3 inférieur à 91 en diminuant successivement de 1 le nombre de matchs :
 $91 = 3 \times 30 + 1$ et $30 + 1 + 7 = 38$ donc 30 victoires, 1 match nul et 7 défaites ou **30 / 1 / 7**
 $91 = 3 \times 29 + 4$ et $29 + 4 + 5 = 38$ donc **29 / 4 / 5**
 et ainsi de suite pour les deux cas suivants **28 / 7 / 3** et **27 / 10 / 1**, alors qu'avec 26 matchs la somme des victoires serait supérieure à celle des matchs joués :
 $91 - 3 \times 26 + 13$ et $26 + 13 = 39$; $39 > 38$.

Ou

- Observer qu'il s'agit de trouver trois nombres dont la somme est 38 tels que le triple du premier plus le deuxième font 91. Puisque 91 n'est pas un multiple de 3 mais que 90 l'est, il y a au moins un match nul. S'il y en a qu'un alors 30 matchs sont gagnés ($30 = 90 : 3$) et il y a donc 7 matchs perdus $7 = 38 - (30 + 1)$.
 - o Procéder de la même manière en augmentant le nombre de matchs nuls. Il ne peut y avoir 2 ou 3 matchs nuls parce que ni 89 ni 88 ne sont multiples de 3. Par contre, il peut y avoir 4 matchs nuls et 29 matchs gagnés ($29 = 87 : 3$) et 5 matchs perdus : $5 = 38 - (29 + 4)$ En continuant ainsi on obtient les autres possibilités et on exclut les nombres de victoires inférieurs à 27.
 - o Réaliser qu'en réduisant le nombre de victoires de un, pour obtenir le même score, il faut augmenter le nombre de nuls de 3, dans la mesure où la condition relative au nombre total de matchs le permet.

Ou

- faire une hypothèse sur le nombre de matchs nuls (ou gagnés), déterminer à partir du nombre de points obtenus durant la saison, le nombre de matchs gagnés (ou nuls) et enfin à partir du nombre de matchs joués, le nombre de matchs perdus. Certaines hypothèses conduisent à des impossibilités.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (11 matchs perdus pour Valence et 4 solutions pour Barcelone : 30/1/7, 29/4/5, 28/7/3 et 27/10/1) avec une explication claire de l'exhaustivité des 4 solutions (essais, raisonnements sur les multiples, déductions, avec détail des calculs...)
- 3 Réponse correcte avec une explication peu claire ou incomplète (il manque des essais ou l'explication qu'il n'y a que 4 possibilités pour Barcelone, ou les détails des calculs ne sont pas donnés)
ou réponse correcte pour Valence et seulement 2 ou 3 possibilités pour Barcelone avec explications claires
ou réponse correcte et bien justifiée pour Barcelone mais pas de réponse pour Valence
- 2 Réponse correcte pour Valence avec le détail des calculs et une seule possibilité pour Barcelone
ou les quatre possibilités pour Barcelone dans lesquelles le nombre de victoires est correct mais avec une ou deux erreurs de calcul pour les défaites
- 1 Réponse correcte seulement pour Valence avec détail des calculs et pas de réponse pour Barcelone
ou seulement la réponse correcte pour Valence sans explication et des essais montrant la compréhension de la situation pour Barcelone (par exemple, les nombres respectent la condition selon laquelle la somme des points égale 91 mais le nombre de matchs joués est différent de 38)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Franche-Comté

9. LES FRIANDISES DE GRAND-MÈRE PAULETTE (Cat. 5, 6, 7)

Dimanche matin, grand-mère Paulette a préparé des friandises pour le repas du soir.

Dans l'après-midi, ses trois chenapans de petits-enfants passent en cachette dans la cuisine pour en manger tout de suite.

Le premier qui en mange un peu est Paul.

Peu après arrive Luc, qui en mange le double de Paul, et encore 5 autres.

Enfin, Bernard, le plus gourmand, mange 9 friandises de plus que Luc. De ce fait, Bernard mange alors exactement le nombre de friandises que Paul et Luc ont mangées à eux deux.

Finalement, il ne reste plus de friandises pour le dîner !

Combien de friandises grand-mère Paulette avait-elle préparées ?

Montrez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver trois nombres, étant donné les relations entre eux : le second est égal au double du premier plus 5, le troisième est égal au second plus 9, et aussi égal à la somme du premier et du second.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois enfants mangent des quantités différentes de friandises et qu'il existe des relations entre ces quantités : Luc mange le double de friandises de Paul plus 5 autres, Bernard en consomme 10 de plus que Luc.
- Comprendre que le nombre de friandises consommées par Bernard est aussi égal au total des friandises consommées par Paul et Luc ensemble et que les trois enfants mangent toutes les friandises préparées par grand-mère.
- Procéder par essais, en faisant une hypothèse sur le nombre de friandises consommées par Paul et par conséquent le nombre de friandises consommées par Luc et Bernard, puis vérifier si le troisième nombre est égal à la somme des deux premiers. Par exemple, si vous posez que Paul a mangé 3 friandises, Luc en a pris le double plus 5 en plus, soit 11 et Bernard 9 de plus que Luc, soit 20. Mais 20 n'est pas égal à la somme de 3 et 11, nombres de friandises mangées par Paul et Luc, alors 3 n'est pas bon.
- Procéder ainsi, en s'aidant éventuellement d'un tableur pour établir que si Paul mange 9 friandises alors Luc en a pris 23 ($9 \times 2 + 5$) et Bernard 32 ($9 + 23$).
- Calculer la somme $9 + 23 + 32 = 64$ pour trouver que grand-mère a préparé 64 friandises.

Ou

- Comprendre d'après les relations données dans l'énoncé que Luc mange deux fois plus de friandises que Paul plus cinq autres, que Bernard en mange 9 de plus que Luc et donc le double de ceux de Paul plus 14.
- Déduire de la troisième information que ce nombre est aussi égal à la somme du nombre des friandises mangées par Paul et Luc, soit trois fois ceux de Paul plus 5. La situation peut également être représentée par des dessins. En déduire que Paul a mangé 9 friandises et déterminer les autres quantités et le nombre total de friandises préparées par Grand-mère.

Ou

- Considérer que Bernard a mangé 9 friandises de plus que Luc, c'est-à-dire le nombre de friandises mangées par Paul. Décrire ce raisonnement avec des mots ou avec une représentation graphique ou en utilisant le symbolisme algébrique suivant : soient P, L et B les nombres de friandises mangées respectivement par Paul, Luc et Bernard, et écrire $L = 2P + 5$, $B = L + 9$, mais aussi $B = P + L$. Par un raisonnement ou par substitution, déduire que $L + 9 = P + L$ donc $P = 9$. Alors Luc a mangé 23 ($2P + 5$) friandises et Bernard 32 et la grand-mère a préparé 64 friandises.

Ou

- Noter x le nombre de friandises consommées par Paul, puis écrire et résoudre l'équation : $2x + 14 = 3x + 5$.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (64 friandises) avec une explication claire et complète de la procédure (explicitation des essais ou représentation graphique, ou procédure algébrique ou description verbale conduisant à la conclusion que $P = 9$)
- 3 Réponse correcte avec explication partielle ou imprécise (par exemple un seul essai ou une formalisation incomplète, ou une description de la procédure arithmétique peu claire)
ou seulement le nombre de friandises consommées par Paul, mais avec une explication claire et complète
- 2 Réponse correcte avec seulement une vérification

- 1 Début de raisonnement correct ou représentation correcte de la situation
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

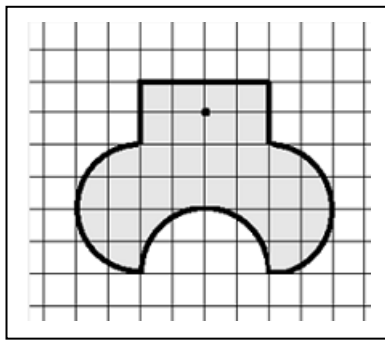
Origine : Groupe Algèbre (GTAL) (reprise du problème “*Concours de pêche*”, 24.II.10)

10. PENDENTIFS EN OR (Cat. 5, 6, 7)

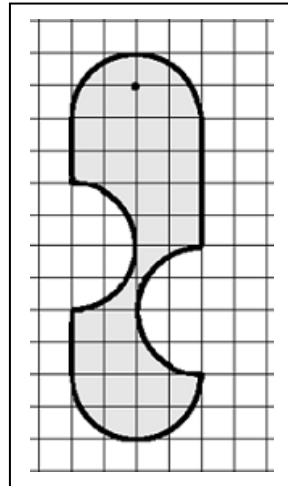
Anna, Béatrice et Camille ont reçu chacune un pendentif en or en cadeau.

Les pendentifs sont plats, ont la même épaisseur, mais ils sont de formes différentes et pour chacun d'entre eux, une quantité d'or différente a été utilisée.

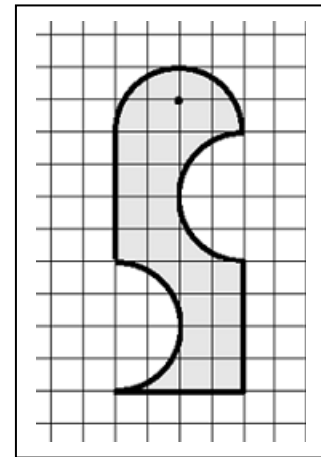
Voici les dessins des pendentifs.



ANNA



BEATRICE



CAMILLE

Indiquez quel est le pendentif pour lequel le plus d'or a été utilisé et celui pour lequel le moins d'or a été utilisé.

Montrez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer l'aire de trois figures non polygonales et concaves obtenues en ajoutant et en supprimant des demi-disques de rectangles

Analyse de la tâche

- Comprendre que la quantité d'or dépend de l'aire du pendentif.
- Constater qu'il s'agit de figures non polygonales.
- Se rendre compte qu'il est nécessaire de comparer les aires après avoir considéré un pendentif à la fois.
- Stratégies possibles :
- Faire le choix du carreau (c) comme unité d'aire.
- Décomposer chaque figure, « découper » et recoller les morceaux et se rendre compte que le pendentif d'Anna a une aire égale à celle d'un rectangle de $6 \times 4 = 24$ c plus celle d'un demi-disque, le pendentif de Béatrice a une aire égale à celle d'un rectangle de $8 \times 4 = 32$ c et le pendentif de Camille a une aire égale à celle d'un rectangle $4 \times 2 = 8$ plus celle d'un carré $4 \times 4 = 16$ donc de 24 carrés, plus celle de la partie dépassant du demi-disque inscrit dans un rectangle 4×2 . Il est immédiatement évident que le pendentif de Béatrice est celui qui a la plus grande aire, il reste alors à déterminer de manière approximative celui qui a une plus petite aire entre le pendentif d'Anna et celui de Camille. L'aire du demi-disque est plus grande que l'aire de la partie excédentaire, donc le pendentif de Camille est celui qui a la plus petite aire.

Ou

- Procéder au comptage des carreaux contenus dans chaque figure, pour déterminer l'aire de manière approximative : $30 \text{ c} < \text{le pendentif d'Anna} < 31 \text{ c}$, le pendentif de Béatrice est de 32 c, $25 \text{ c} < \text{le pendentif de Camille} < 26 \text{ c}$. Déduire que le pendentif pour lequel plus d'or a été utilisé est celui de Béatrice, et celui pour lequel moins d'or a été utilisé est celui de Camille.

Ou

- Procéder au calcul de l'aire approximative des figures individuelles, qui peuvent être reliées aux rectangles en prenant un carreau comme unité d'aire ($6 \times 4 = 24$ c Anna, $4 \times 8 = 32$ c Béatrice, $4 \times 8 = 32$ c Camille), auxquels des demi-disques identiques ont été ajoutés et supprimés. L'aire approximative d'un demi-disque est $6,28 = (3,14 \times 2^2) / 2$.
Aire du pendentif d'Anna : $24 - 6,28 + 6,28 + 6,28 = 30,28$ c

Aire du pendentif de Béatrice : $32 - 6,28 - 6,28 + 6,28 + 6,28 = 32$ c

Aire du pendentif de Camille : $32 - 6,28 - 6,28 + 6,28 = 25,72$ c

En déduire que le pendentif pour lequel plus d'or a été utilisé est celui de Béatrice, et celui pour lequel moins d'or a été utilisé est celui de Camille.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (le pendentif de Béatrice est celui pour lequel plus d'or a été utilisé et celui de Camille est celui pour lequel moins d'or a été utilisé ou formulation équivalente) avec une description claire de la procédure effectuée (décomposition, comptage, comparaison des figures ou calculs approchés d'aires)
- 3 Réponse correcte avec une description peu claire de la procédure suivie
ou réponse erronée en raison d'une seule erreur de calcul ou de comptage avec une description claire de la procédure suivie
ou calcul de l'aire de seulement deux pendentifs
- 2 Seule la figure de plus grande aire est identifiée, avec une explication complète, avec présence au moins de tentatives pour déterminer l'aire des deux autres surfaces
ou calcul de l'aire d'un seul pendentif
- 1 Réponse correcte sans explication
ou début du raisonnement correct : il est clair que la grandeur en jeu est l'aire
- 0 Incompréhension du problème (par exemple, le périmètre de la zone est pris en compte à la place de l'aire)

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Rozzano

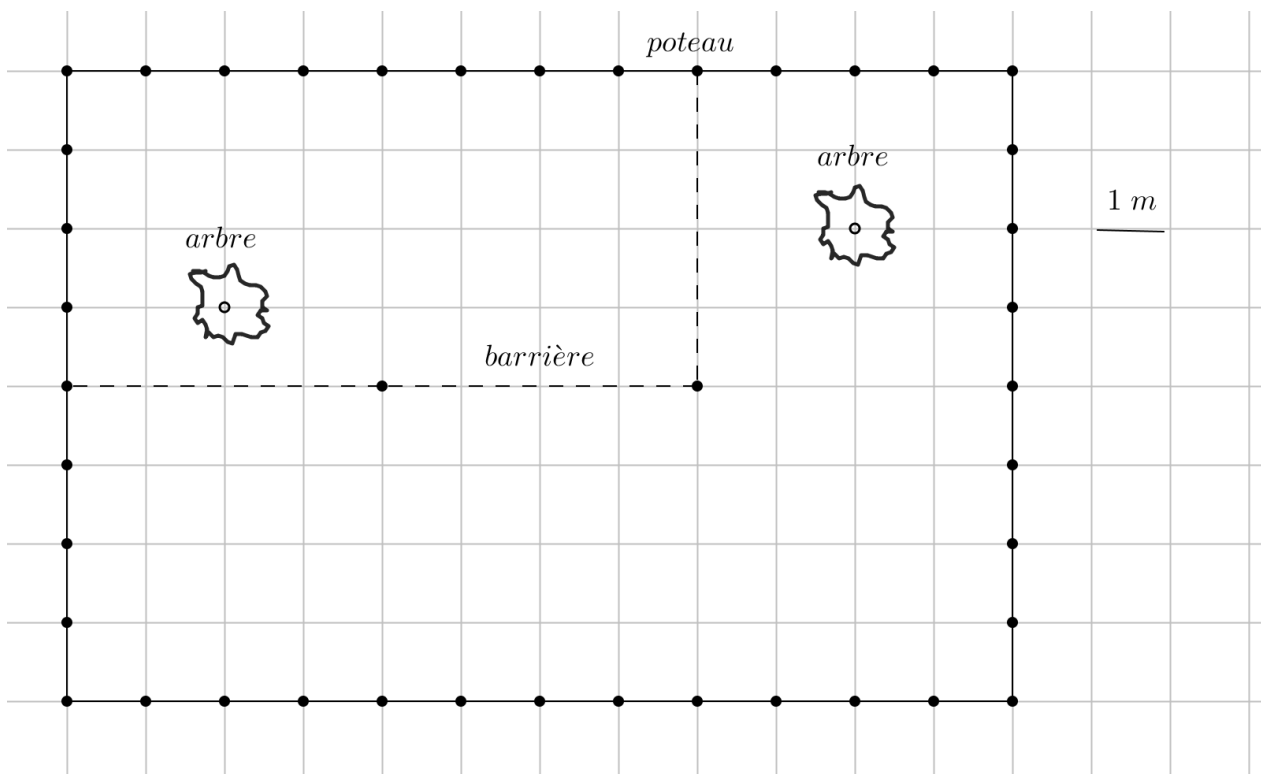
11. LA BERGERIE DU BERGER ARTHUR (Cat. 6, 7, 8)

Près de sa bergerie, le berger Arthur a construit un enclos rectangulaire de 8 m et 12 m de côtés. La clôture est supportée par des piquets qui sont distants de 1 mètre l'un de l'autre. À l'intérieur de l'enclos, il y a deux arbres qu'Arthur ne souhaite pas couper.

Arthur veut diviser l'espace fermé en deux parties, une pour les moutons et une pour les chèvres, de sorte que la partie réservée aux moutons ait une aire double de celle réservée aux chèvres et que dans chacune d'elles il y ait un arbre.

Pour ce faire, il dispose de quatre barrières de 4 m de long chacune et d'une barrière de 6 m de long, qui s'attachent les unes aux autres par leurs extrémités et qui peuvent également se fixer aux piquets de clôture déjà existants. Les barrières sont disposées parallèlement aux bords de l'enclos.

Voici une des possibilités selon laquelle Arthur pourrait diviser son enclos, elle est obtenue en utilisant trois barrières longues de 4 m.



Quelles sont toutes les autres dispositions possibles qu'Arthur peut avoir pour diviser son enclos selon les règles qu'il s'est données ?

Dessinez-les.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer toutes les manières possibles de diviser, avec deux sortes de segments de longueurs données disposés parallèlement aux côtés, un rectangle en deux parties, dont l'un a une aire double de l'autre et chacune contenant un point donné.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les barrières doivent être placées sur le quadrillage de la grille, parallèlement aux côtés du rectangle.
- Comprendre également, à partir de l'exemple, que toutes les barrières ne doivent pas nécessairement être utilisées à chaque fois.

- Calculer l'aire de l'enclos 96 m^2 (12×8) et en déduire l'aire des deux parties : la plus petite 32 m^2 ($96 : 3$) et la plus grande 64 m^2 (2×32). Il est aussi possible de raisonner en prenant pour unité le carreau.
- Identifier la possibilité symétrique à celle donnée à titre d'exemple (fig.1).
- Comprendre qu'en utilisant uniquement des barrières de 4 mètres, il existe six autres possibilités pour réaliser la division interne de l'enclos en respectant les contraintes : avec deux barrières comme en fig.2 et fig.3 ; avec trois barrières fig.4 et fig.5, avec quatre barrières comme en fig.6 et en fig.7

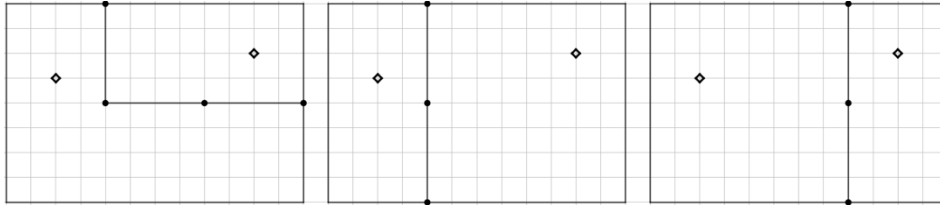


fig.1

fig.2

fig.3

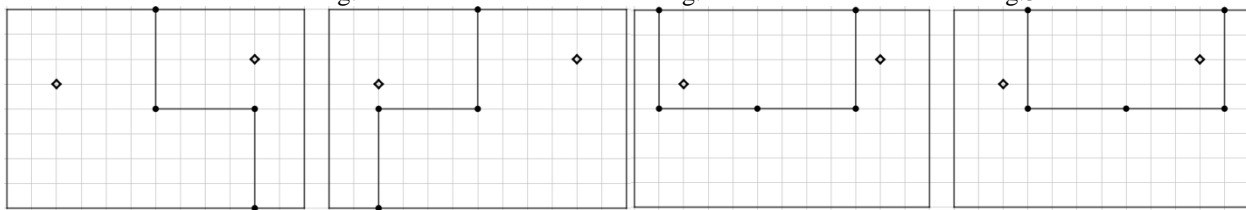


fig.4

fig.5

fig.6

fig.7

- De plus, en utilisant deux barrières de 4 mètres et celles de 6 mètres, on peut identifier deux autres possibilités (fig.8 et fig.9) :

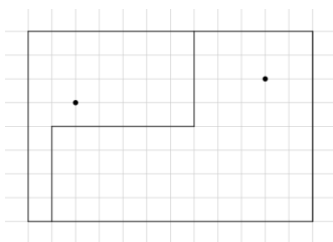


fig 8

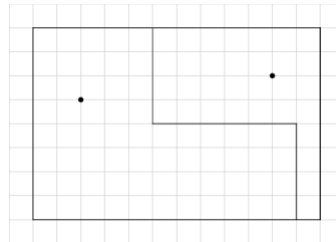


fig 9

Attribution des points

- 4 8 ou 9 figures correctes sans figures erronées.
- 3 7 figures correctes sans figures erronées
ou 8 ou 9 figures correctes avec au plus 2 figures erronées
- 2 8 ou 9 figures correctes avec 3 figures erronées ou plus
ou 7 figures correctes avec une ou plusieurs figures erronées
ou 5 à 6 figures correctes avec ou sans figures erronées
ou seulement 4 figures non symétriques identifiées, autres que celle donnée (par exemple fig. 2, 4, 6, 8)
- 1 Moins de 5 figures correctes, éventuellement avec quelques figures erronées
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Milan

12. FRIANDISES DE NOËL (Cat. 6, 7, 8)

Pour Noël, Amandine a préparé deux types de gâteaux : des pâtisseries à la noix de coco et des biscuits aux amandes. Elle a préparé 174 gâteaux en tout.

Amandine décide de répartir les gâteaux dans 27 petites boîtes et dans chaque boîte elle ne met qu'un seul type de gâteau.

Dans les boîtes de pâtisseries elle met 4 gâteaux à la noix de coco et dans les boîtes de biscuits elle met 7 biscuits aux amandes. Quand elle a terminé, les 27 boîtes sont pleines.

Combien de boîtes de pâtisseries et combien de boîtes de biscuits a-t-elle remplies ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver deux nombres entiers naturels dont la somme vaut 27 et la somme des produits du premier nombre par 4 et du second par 7 vaut 174.

Analyse de la tâche

- Se représenter la situation : les 174 gâteaux répartis en 27 boîtes où dans chaque boîte les gâteaux sont tous du même type : les unes de 4 « pâtisseries », les autres de 7 « biscuits ».
- Percevoir les relations numériques en distinguant bien les nombres de boîtes et les nombres de gâteaux : le nombre de « pâtisseries » est égal à quatre fois le nombre de boîtes « pâtisseries » ($4 \times P$), le nombre de « biscuits » est égal à sept fois le nombre de boîtes « biscuits » ($7 \times B$), la somme des deux nombres de boîtes est égale à $27 = P + B$, le nombre des gâteaux dans les deux types de boîtes est égal à $174 = (4 \times P) + (7 \times B)$.
- Pour trouver la solution sans recourir à l'algèbre (système de deux équations linéaires à deux inconnues) il faut commencer par un essai en choisissant les deux nombres de boîtes (par exemple 20 et 7), calculer les nombres de gâteaux correspondants ($(4 \times 20) + (7 \times 7) = 129$) et constater que le nombre de gâteaux est différent de 174 (à moins d'être tombé directement sur la bonne répartition !) puis recommencer avec d'autres essais, au hasard.
 - Ou en « conduisant » les essais en fonction des résultats précédents (par exemple après 20 et 7 qui donne 129, se rendre compte qu'il faudra augmenter le nombre de boîtes qui ont le plus de gâteaux (B, avec 7 gâteaux par boîte) et diminuer le nombre de celles qui ont le moins de gâteaux (P, avec 4 gâteaux par boîte). Par exemple 15 et 12 donne $(4 \times 15) + (7 \times 12) = 144$, etc. On arrive ainsi à la solution 5 et 22 vérifiée par $(4 \times 5) + (7 \times 22) = 174$.
 - Ou en essayant systématiquement tous les couples dont la somme est 27 : (0 ; 27), (1 ; 26)... pour arriver à (5 ; 22).

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (5 boîtes de pâtisseries et 22 boîtes de biscuits) avec une description claire de la démarche-(les essais sont indiqués avec les calculs permettant de distinguer les essais rejetés et la solution retenue)
- 3 Réponse correcte avec des explications incomplètes (seulement la vérification de la solution sans mentionner les essais ou des essais contenant des erreurs)
- 2 Réponse correcte sans explication ni vérification
ou réponse erronée ne respectant pas la contrainte des 27 boîtes (par exemple : 26 boîtes de pâtisseries et 10 boîtes de biscuits $(26 \times 4) + (10 \times 7) = 174$)
ou une seule erreur de calcul dans la résolution
- 1 Début de recherche correcte, par exemple quelques essais montrant que les informations ont été comprises, mais sans aboutir
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg-en-Bresse

13. POMPES (Cat. 7, 8, 9, 10)

Marc s'est organisé un programme de musculation pour se maintenir en forme. Le programme prévoit de commencer en faisant 10 pompes le premier jour et d'y ajouter chaque jour un certain nombre de pompes, toujours le même.

Aujourd'hui, ayant commencé son programme depuis plus d'une semaine, il a battu son record avec 73 pompes.

Durant combien de jours Marc a-t-il effectué son programme de pompes ?

Donnez toutes les possibilités.

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Déterminer le nombre de termes d'une suite arithmétique connaissant le premier et le dernier terme (10 et 73) et le fait que la raison est entière.

Analyse de la tâche

- Comprendre la modalité d'exécution du programme de pompes : le premier jour 10 pompes, le deuxième $10 + n$ (avec n nombre inconnu), le troisième $10 + n + n$, et ainsi de suite jusqu'au jour des 73 pompes.
- Se rendre compte que le nombre de jours durant lesquels Marc a exécuté son programme est égal au nombre p de fois qu'il a ajouté n pompes aux 10 pompes du premier jour, augmenté de 1 (le premier jour)
- Comprendre qu'il faut déterminer deux nombres naturels p et n dont le produit est $p \times n = 63$ ($73 - 10$) et que par conséquent ces nombres sont déterminés par la décomposition de 63 en produit de 2 facteurs.
- Compte tenu qu'il a commencé son programme depuis plus d'une semaine ($p \geq 7$) et vu que 63, 21, 9, 7, 3 et 1 sont les seuls diviseurs de 63 les seuls couples $(p ; n)$ possibles sont :
 $n = 1$ et $p = 63$, $n = 3$ et $p = 21$, $n = 7$ et $p = 9$, $n = 9$ et $p = 7$.
- Conclure que Marc a exécuté son programme de pompes en 64 (= 63+1) jours, ou en 22 (= 21+1) jours ou en 10 (= 9+1) jours ou en 8 (= 7+1) jours, ajoutant respectivement 1, 3, 7 ou 9 pompes de plus chaque jour.

Ou

- Procéder par essais en partant de 10 pompes, pour atteindre 73 pompes en plus de 7 jours, en essayant successivement toutes les suites possibles (raison 1, 2, 3...9) en écartant éventuellement les raisons paires...

Ou

- Remarquer que pour augmenter de 63 pompes, on peut procéder avec des multiples de 3. Essayer avec 3, et constater qu'en 21 étapes on arrive à la solution 22 jours.
- Puis essayer 9 qui convient avec 7 étapes (donc 8 jours) et penser à la commutativité de la multiplication et essayer 7 qui convient avec 9 étapes (donc 10 jours).
- Remarquer que les autres produits obtenus par commutativité donnent des programmes qui sont inférieurs à une semaine.
- Par cette méthode on ne peut pas être certain de trouver toutes les solutions possibles à moins de vérifier que les essais pour un nombre de pompes égal à 2, 4, 5, 6 et 8 ne conviennent pas.

Attribution des points

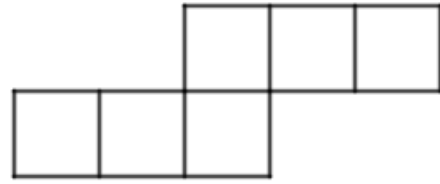
- 4 Réponse correcte (64 ou 22 ou 10 ou 8 jours) avec explication claire de la procédure suivie
- 3 Réponse correcte avec explication incomplète ou peu claire
ou réponse (63, 21, 9) avec rejet expliqué de la solution « 7 » qui ne ferait pas plus d'une semaine dans le cas où on a oublié d'ajouter le premier jour au total des jours
ou trois solutions sont trouvées avec explications
- 2 Réponse correcte sans explication
ou réponse erronée due à une erreur de calcul
ou deux solutions sont trouvées parmi les 4 possibles
ou réponse (63, 21, 9, 7) par oubli d'ajouter le premier jour au total des jours
ou les 4 réponses correctes plus une réponse erronée correspondant à moins d'une semaine
- 1 Début de recherche cohérente ou une seule solution trouvée
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena

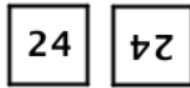
14. DES DÉS ÉTRANGES (Cat. 8, 9, 10)

Riccardo construit des dés à l'aide de ce patron :

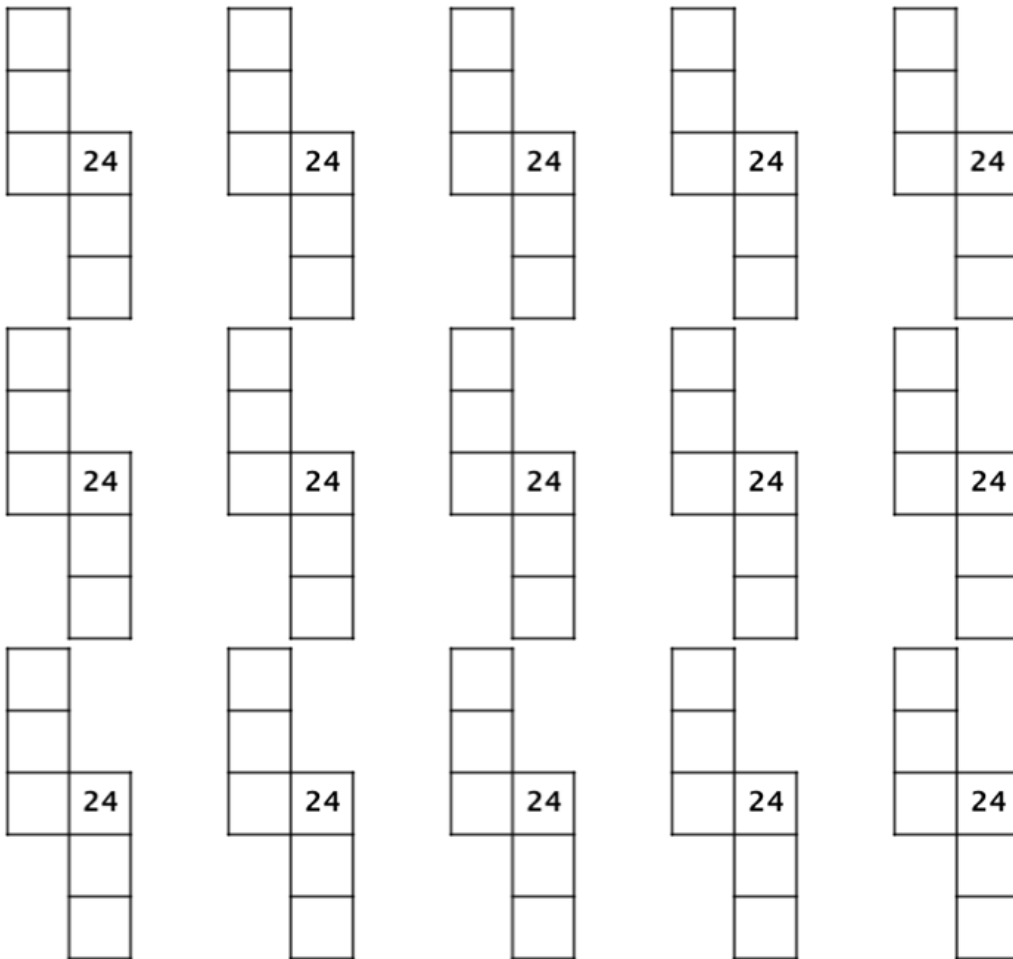


Il respecte les règles suivantes :

- les nombres 1 et 24 sont écrits sur tous les dés ;
- le produit des nombres écrits sur des faces opposées est toujours 24 ;
- chaque dé est composé de six nombres différents ;
- tous les dés sont différents ;
- le sens de l'écriture des nombres sur chaque face n'a pas d'importance, par exemple ces deux faces sont identiques :



Représentez tous les dés différents que Riccardo peut construire à l'aide des patrons fournis ci-dessous. Expliquez comment vous avez trouvé vos solutions.



Vous n'êtes pas obligés d'utiliser tous ces patrons et s'il vous en manque vous pouvez en fabriquer d'autres.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

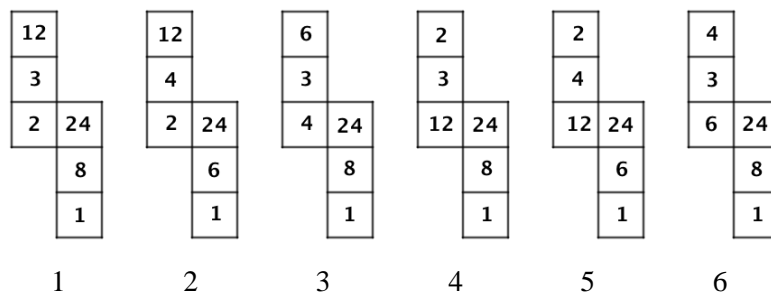
Trouver toutes les façons de placer des nombres sur les faces d'un cube de telle sorte que le produit des nombres écrits sur des faces opposées soit toujours égal à 24.

Analyse de la tâche

- Dessiner un dé ou le construire pour identifier les faces opposées sur lesquelles il faut écrire les nombres.
- Comprendre qu'il faut identifier parmi tous les diviseurs de 24 (1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24) les paires de nombres qui multipliés entre eux donnent 24. Les paires qui répondent à cette condition sont : (1 ; 24), (2 ; 12), (3 ; 8) et (4 ; 6), mais puisque le couple (1 ; 24) apparaît toujours sur chaque dé, il faudra trouver 2 autres couples parmi les 3 couples restants pour compléter les 4 autres faces.
- Procéder par essais-erreurs pour placer les différentes paires de couples possibles (remplir un patron et vérifier s'il a déjà été trouvé).

Ou

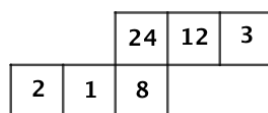
- Pour être sûr de n'oublier aucune solution, il vaut mieux fixer un couple et adapter les autres à tour de rôle ; par exemple, prendre le couple (2 ; 12) qui se combinera une fois avec (3 ; 8) et une autre fois avec (4 ; 6). De cette manière, 2 dés sont identifiés : ((1 ; 24) - (2 ; 12) - (3 ; 8)) et ((1 ; 24) - (2 ; 12) - (4 ; 6)).
- Procéder ensuite de la même manière en fixant le couple (3 ; 8) en le combinant avec le couple (4 ; 6) ; on obtient ainsi un autre dé : ((1 ; 24) - (4 ; 6) - (3 ; 8)) ; donc au total, Riccardo peut trouver 3 dés.
- Comprendre qu'en intervertissant deux faces opposées dans chacun des trois dés trouvés, on trouve trois nouveaux dés.
- Comprendre qu'en intervertissant d'autres faces opposées on retrouve un dé déjà répertorié parmi les 6 déjà trouvés (vérifiable par la manipulation).
- Remplir exactement 6 patrons ou entourer les 6 patrons corrects parmi les essais ou barrer tous les patrons ne répondant pas aux règles fixées par Riccardo pour ne garder que les 6 corrects suivants (d'autres organisations sont possibles) :



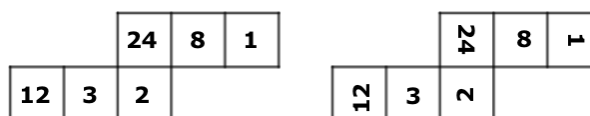
- Erreurs possibles :
 - Liste erronée des décompositions en deux facteurs du nombre 24 ;
 - Oubli des possibilités correspondant à l'intervention de seulement 2 faces opposées ;
 - Ne pas percevoir des dés identiques et proposer des doublons, par exemple :



- Mal positionner les faces opposées, par exemple :



- Considérer les dés suivants comme différents (on ne pénalise pas mais on ne valorise pas non plus) :



- Possibilités équivalentes

A	
B	
C	24
D	
	1

1 ^{ère} possibilité :			
A	B	C	D
12	3	2	8
3	2	8	12
2	8	12	3
8	12	3	2

2 ^e possibilité :			
A	B	C	D
12	4	2	6
4	2	6	12
2	6	12	4
6	12	4	2

3 ^e possibilité :			
A	B	C	D
6	3	4	8
3	4	8	6
4	8	6	3
8	6	3	4

4 ^e possibilité :			
A	B	C	D
2	3	12	8
3	12	8	2
12	8	2	3
8	2	3	12

5 ^e possibilité :			
A	B	C	D
2	4	12	6
4	12	6	2
12	6	2	4
6	2	4	12

6 ^e possibilité :			
A	B	C	D
4	3	6	8
3	6	8	4
6	8	4	3
8	4	3	6

Attribution des points

- 4 Exactly 6 drawings of dice different well identified (for example surrounded or not surrounded eventually among other drawings) with explanations sufficiently detailed to understand the reasoning (list of possible couples, identification of opposite faces with material, table or combination tree, evocation of the inversion of 2 faces)
- 3 Exactly 6 drawings of dice different well identified (for example surrounded or eventually not surrounded among other drawings), without explanations
or at least 4 drawings of dice different well identified (for example surrounded or not surrounded eventually among other drawings) with explanations sufficiently detailed
- 2 At least 4 drawings of dice different well identified (for example surrounded or not surrounded eventually among other drawings) without explanations
or the 3 drawings of dice making respectively the three couples (24 ; 1), (12 ; 2), (8 ; 3) or (24 ; 1), (12 ; 2), (6 ; 4) or (24 ; 1), (8 ; 3), (6 ; 4) without envisaging the dice symmetrical by rapport to a plane (with explanations sufficiently detailed to understand the reasoning)
- 1 At least two drawings of dice different identified (for example surrounded or not surrounded eventually among other drawings) with or without explanations
- 0 Incomprehension of the problem

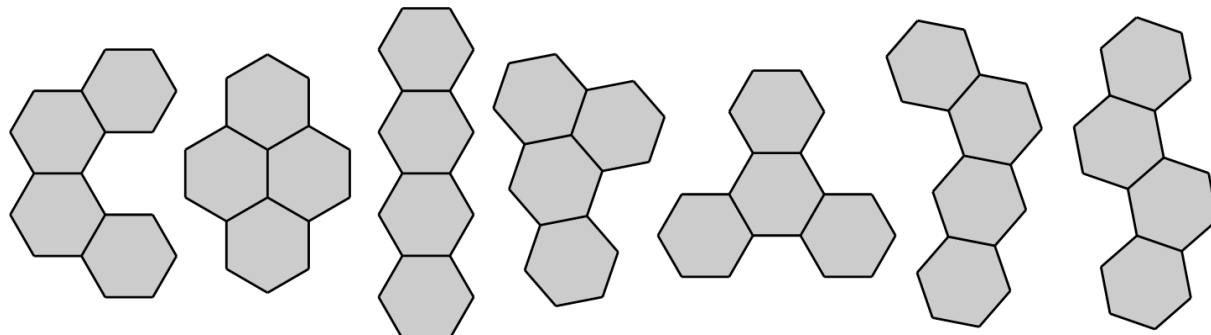
Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Groupe géométrie 3D (GTGE)

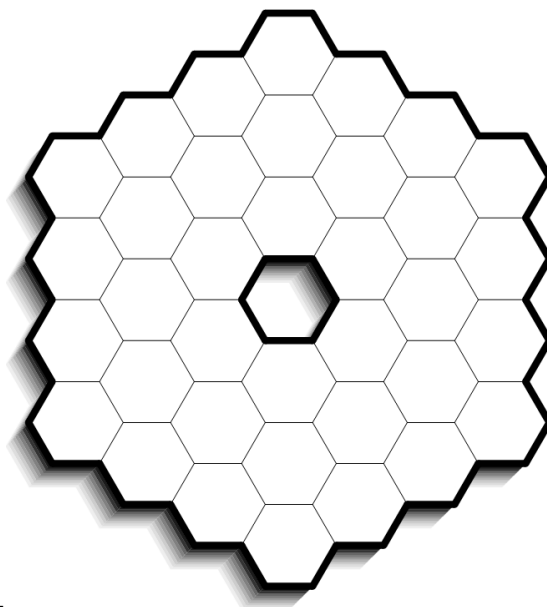
15. JEU HEXAGONAL (Cat. 8, 9, 10)

Dans la boîte de ce jeu, il y a beaucoup de pièces. Toutes les pièces sont des assemblages de quatre hexagones réguliers.

Il y a sept types de pièces différentes, comme le montre le dessin ci-dessous :



Le jeu consiste à recouvrir complètement le plateau de jeu représenté ci-dessous en n'utilisant qu'un seul type de pièces, autant de fois que nécessaire.

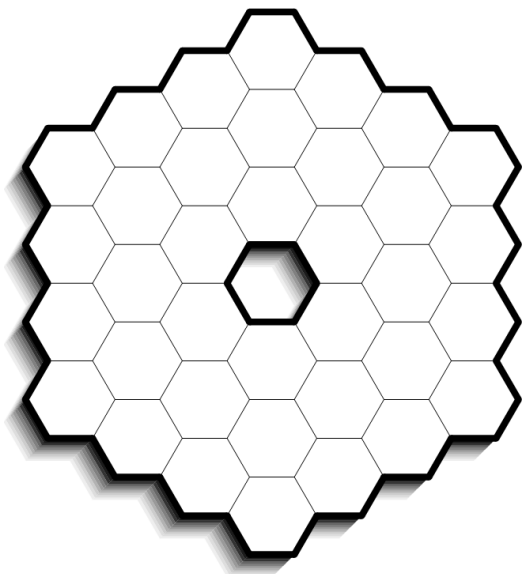
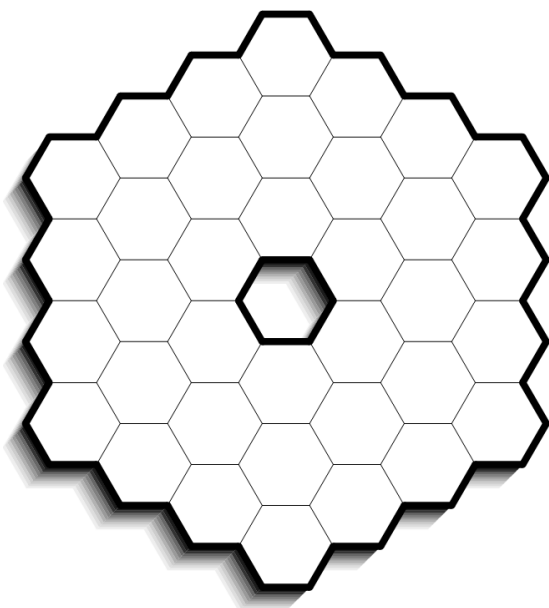
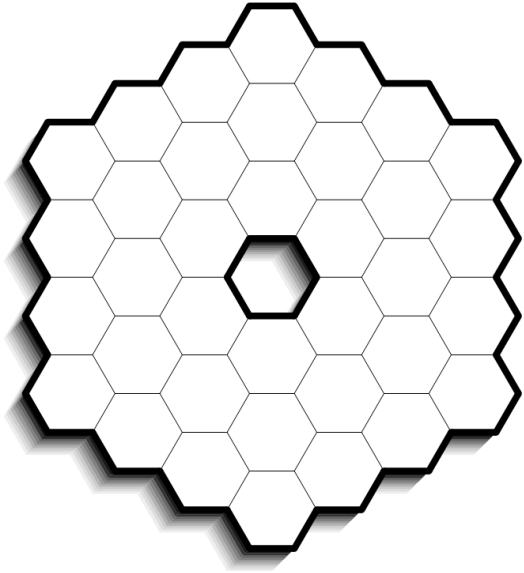
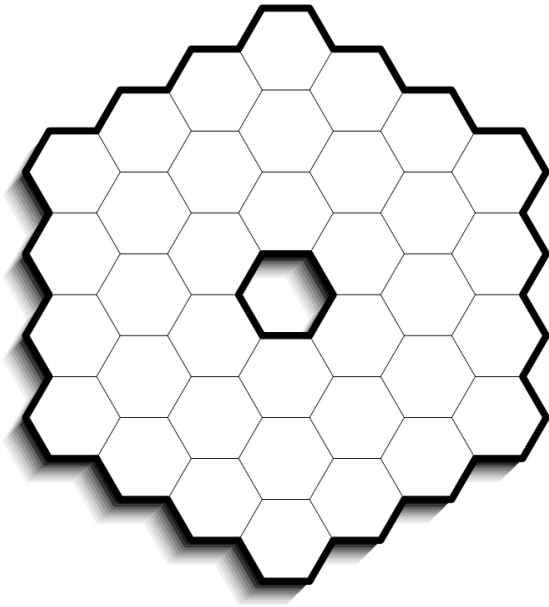
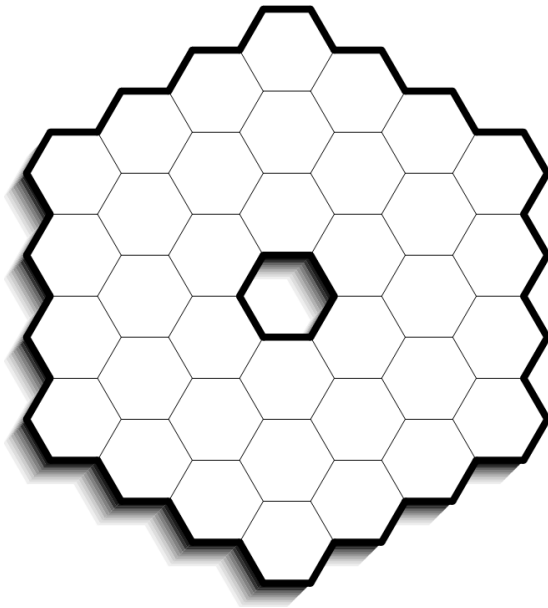
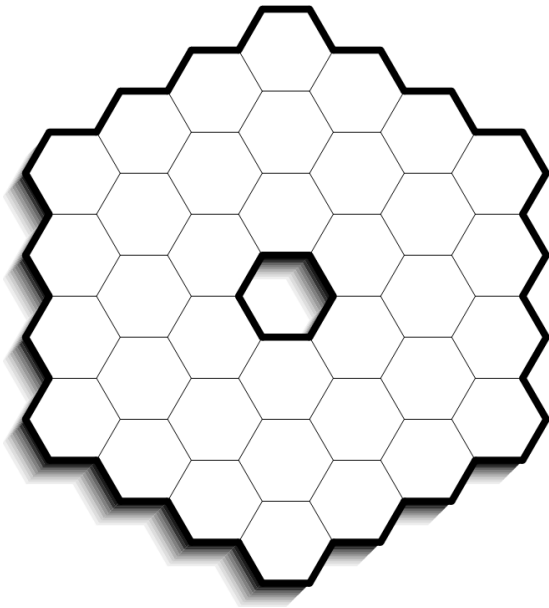


Il est possible de faire tourner et même de retourner une pièce, mais il ne doit y avoir ni chevauchement, ni trous en plus du trou central déjà présent sur le plateau de jeu.

Identifiez, parmi les pièces disponibles, quels types permettent de recouvrir complètement le plateau de jeu en respectant les règles.

Pour chaque type de pièce identifié, dessinez la solution en utilisant les plateaux de jeu qui se trouvent sur la feuille jointe.

Vous n'êtes pas obligés d'utiliser tous les plateaux de jeu.



ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Déterminer parmi sept types de pièces, chacune composée de 4 hexagones réguliers, celles qui permettent de recouvrir un plateau de jeu hexagonal composé de 36 hexagones avec un trou central.

Analyse de la tâche

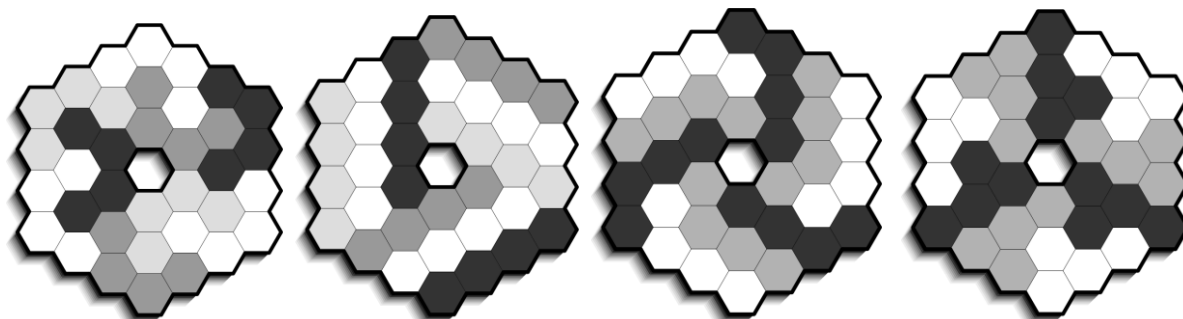
- Observer le plateau et prendre conscience qu'au centre se trouve un trou qui ne doit pas être couvert.
- Comprendre que pour un même recouvrement, il n'est possible de n'utiliser qu'un type de pièce et que les pièces peuvent être tournées ou retournées.
- Dénombrer les hexagones sur le plateau de jeu et constater que 9 pièces sont toujours nécessaires.
- En imaginant le contenu de la boîte, procéder par découpage de plusieurs pièces du même type, les placer directement sur la surface de jeu de façon à le recouvrir totalement.

Ou

- Essayer de colorier les pièces du même type sur le plateau, en cherchant à le recouvrir entièrement, en faisant attention à ce qui change si elles sont tournées ou retournées.

Attribution des points

- 4 Dessin correct des quatre pavages avec les quatre types de pièces différents qui permettent de recouvrir le plateau de jeu

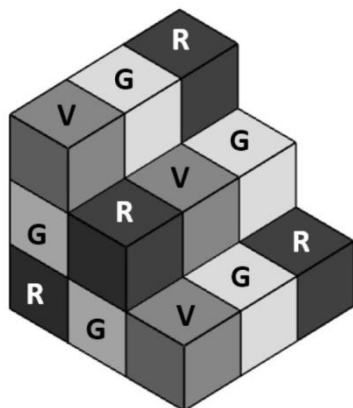


- 3 Dessin correct de trois pavages avec trois types de pièce différents qui permettent de recouvrir le plateau de jeu
- 2 Dessin correct de deux pavages avec deux types de pièce différents qui permettent de recouvrir le plateau de jeu
- 1 Dessin correct d'un pavage avec un type de pièce qui permet de recouvrir le plateau de jeu
Ou exclusion justifiée d'un type de pièce
Ou compréhension des contraintes et propositions de plusieurs tentatives inabouties de pavage
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Suisse Romande

16. ESCALIER DE CUBES (Cat. 8, 9, 10)



Lari a construit cet escalier en empilant des cubes de son jeu de construction. Tous les cubes utilisés sont de même taille et sont colorés en vert (V), en gris (G) ou en rouge (R). Le nombre de cubes qui sont dans l'escalier n'est pas nécessairement le même pour chacune des trois couleurs.

Pour construire l'escalier, Lari a respecté la règle suivante : deux cubes posés face contre face sont toujours de couleurs différentes.

Indiquez les couleurs possibles des 9 cubes de la base et la position qu'ils occuperont pour que la construction finale respecte la contrainte que s'est donnée Lari.

Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.

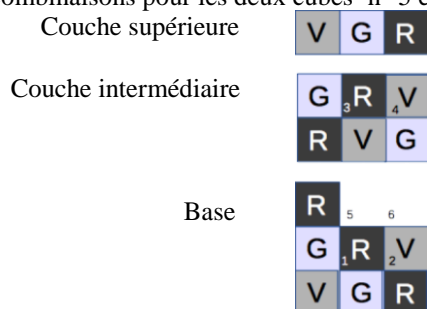
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

À partir d'un dessin en perspective d'un escalier construit avec 18 cubes de trois couleurs différentes (de 3 marches de trois cubes de largeur, dont on voit les trois rangs supérieurs et la « façade » de gauche) trouver la couleur des cubes non visibles, sachant que deux cubes ayant une face en commun sont toujours de couleurs différentes.

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que l'escalier est constitué de 18 cubes dont 12 sont visibles et 6 non visibles sur le dessin : les deux du milieu et de droite sous la deuxième marche, les quatre du milieu et de droite, sur deux étages sous la troisième marche.
- Pour s'approprier la règle de construction (deux cubes avec une face commune sont de couleurs différentes), vérifier qu'elle est respectée sur les cubes visibles.
- Analysez un cube à la fois en comparant sa position avec les autres et déterminez la couleur qu'il peut avoir, remarquant que :
 - le cube du milieu sous la deuxième marche est sous le vert de la deuxième étape et à côté du gris en regardant l'échelle sur la vue de face, il est donc rouge (n.1),
 - son voisin à droite est sous le gris et à côté du rouge (n.1), il doit donc être vert (n.2),
 - le cube du milieu directement sous la troisième marche (au deuxième étage) se trouve sous un gris, à côté d'un gris et derrière un vert, il doit donc être rouge (n.3),
 - son voisin à droite est sous un rouge, à côté du rouge (n.3) et derrière un gris, il doit donc être vert (n.4)
 - le cube du milieu sous la deuxième marche est sous le vert de la deuxième marche et à côté du gris en « façade », il doit donc être rouge. (n° 1).
 - Le cube du milieu à la base de la troisième marche est sous un rouge (n° 3), à côté d'un rouge et derrière un rouge (n° 1) il peut donc être gris ou vert (n° 5).
 - a) S'il est gris, son voisin de droite sera à côté du n° 5 gris, derrière un vert (n° 2), et sous le vert (n° 4) il sera donc rouge (n° 6 rouge).
 - b) S'il est vert, son voisin de droite sera à côté du n° 5 vert, derrière un vert (n° 2), et sous le vert (n° 4) et il pourra donc être gris ou rouge.
- En définitive il y a trois combinaisons pour les deux cubes n° 5 et n° 6 : G R ; V G ; V R



Ou

- Chercher toutes les possibilités pour compléter les emplacements 1, 2, 5 et 6 puis éliminer celles qui ne conviennent pas en tenant compte de l'organisation des couches intermédiaire et supérieure.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (trois combinaisons pour les cubes 5 et 6 : G R; V G; V R), avec des explications claires (avec un dessin ou un texte)
- 3 Réponse correcte avec une explication peu claire
ou réponse avec seulement deux possibilités sur les trois avec des explications claires
- 2 Une seule possibilité identifiée avec une représentation claire de la base
ou réponse avec seulement deux possibilités sur les trois sans explication
- 1 Début de recherche qui montre la compréhension du texte
- 0 Incompréhension de la situation, ou aucun cube n'est identifié correctement

Niveaux : 8, 9, 10**Origine :** Groupe géométrie 3D et Groupe problèmes (GTGE+ GP)

17. LE GOÛTER MIS EN JEU (Cat. 8, 9, 10)

Marie propose un défi à Raoul.

Elle prend quatre cartes avec des images : sur la première carte est dessinée une tomate rouge, sur la deuxième carte une salade verte, sur la troisième une fraise rouge et sur la quatrième une courgette verte.

Marie mélange les cartes, les place à l'envers sur la table, et dit à Raoul :

« Choisis deux cartes au hasard. Si tu obtiens deux cartes avec un dessin de la même couleur, tu gagnes et je te donne mon goûter. En revanche, si tu prends deux cartes avec des dessins de couleurs différentes, c'est moi qui gagne et tu me donnes ton goûter. »

Qui a le plus de chances de gagner le goûter de l'autre ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans la situation de tirage au sort de deux cartes sur quatre, chacune au dessin différent mais deux étant d'une couleur, deux étant d'une autre couleur, dénombrer les possibilités d'obtenir un tirage de deux cartes de la même couleur.

Analyse de la tâche

- Comprendre que parmi les 4 cartes, il y en a deux cartes rouges, et deux cartes vertes avec des dessins différents.
- Faire la liste de toutes les paires possibles en tirant deux cartes. Il y en a 6 :
Tomate - R , Salade - V **Tomate - R , Fraise - R** Tomate - R , Courgette - V
Salade - V , Fraise - R **Salade - V , Courgette - V** Fraise - R , Courgette - V.
[Ou 12 couples possibles si on tient compte de l'ordre].
- Compter les tirages de la même couleur : **2** et ceux de couleurs différentes : 4
[ou en tenant compte de l'ordre, **4** contre 8]
- Conclure que Marie a plus de chances que Raoul de gagner le goûter.

Ou

- Comprendre que si Raoul tire une première carte d'une certaine couleur, il reste 3 cartes dont deux sont de l'autre couleur et une de la même couleur. Il a donc une chance sur trois de tirer la deuxième carte qui lui donne le goûter. Marie a donc deux chances sur trois de gagner le goûter de Raoul.

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (Marie a plus de chances que Raoul de gagner un goûter) avec des explications claires (liste complète des 6 ou 12 tirages possibles ou raisonnement sur les possibilités de choix des deux cartes pour Raoul)
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires
- 2 Réponse erronée avec présence des 6 possibilités (ou 12)
ou la liste de 4 ou 5 possibilités avec une conclusion cohérente (ou de 8 à 10 possibilités avec ordre)
ou réponse correcte sans explications ni traces des possibilités, ou avec explications incohérentes
- 1 Proposition d'une liste de 3 à 5 possibilités, mais sans conclusion ou conclusion incohérente
- 0 Incompréhension du problème, ou réponse 2 chances sur 2

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Suisse Romande

18. LA CONFITURE DE MYRTILLES (Cat. 9, 10)

Dans un supermarché, il y a en vente trois sortes différentes de pots de confiture de myrtilles :

- les pots de la première sorte contiennent 500 g de confiture pour un coût de 12,60 euros chacun ;
- les pots de la deuxième sorte contiennent 300 g de confiture pour un coût de 10,80 euros chacun ;
- les pots de la troisième sorte contiennent 160 g de confiture pour un coût de 6,40 euros chacun.

Le directeur du supermarché décide de faire une offre promotionnelle sur les pots de 160 g :

- il veut faire une réduction du prix d'au plus 50 % ;
- il veut également qu'avec cette réduction, l'achat de ces pots de 160 g soit plus avantageux (pour une même quantité de confiture achetée) qu'avec les deux autres sortes de pots.

Quel pourcentage de réduction le directeur peut-il afficher ?

Indiquez les valeurs entre lesquelles le pourcentage de remise peut varier et expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI**Tâche mathématique**

Comparer les prix unitaires de trois masses de confitures données et déterminer un pourcentage de réduction inférieur à 50 % à proposer pour que le prix de la plus petite devienne le plus avantageux.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois pots ont des masses différentes et que leur prix dépend de la quantité de confiture qu'ils contiennent et du prix au kilogramme.
- Comprendre que la comparaison doit être faite sur un prix unitaire, par exemple par kg.
- Calculer les prix unitaires de chaque pot par exemple par kg : $12,60/0,5 = 25,20$ € pour les pots de 500 g, $10,80/0,3 = 36$ € pour les pots de 300 g et $6,40/0,16 = 40$ € pour les pots de 160 g.
- Déterminer les pourcentages de remise qu'il est possible d'appliquer sur le prix des pots de 160 g pour obtenir un prix au kg inférieur à 25,20 €. Par exemple 20 € donnerait une réduction de 50 %. Elle doit être d'au moins $(1 - 25,20/40) = 0,37 = 37\%$ ce qui ferait 25,20 € au kg.

Ou

- Procéder par essai sur le pourcentage de remise. Par exemple, avec 25% de réduction, vous obtenez un coût de 30 € par kg ; avec 30%, vous obtenez un coût de 28 € par kg ; et ainsi de suite jusqu'à une réduction de 37% correspondant à un coût de 25,20 € par kg.
- Déduire que le pourcentage de remise s doit vérifier $37\% < s \leq 50\%$

Attribution des points

- 4 Réponse correcte (remise s : $37\% < s \leq 50\%$) avec explications claires et calculs détaillés
- 3 Réponse correcte avec explications incomplètes ou peu claires
ou réponse que la remise doit être comprise entre 37% et 50% sans spécifier que la remise doit être strictement supérieure à 37% mais qu'elle peut être inférieure ou égale à 50%
- 2 Réponse correcte sans explications
- 1 Début de raisonnement correct, par exemple le calcul des prix réduits par kg
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

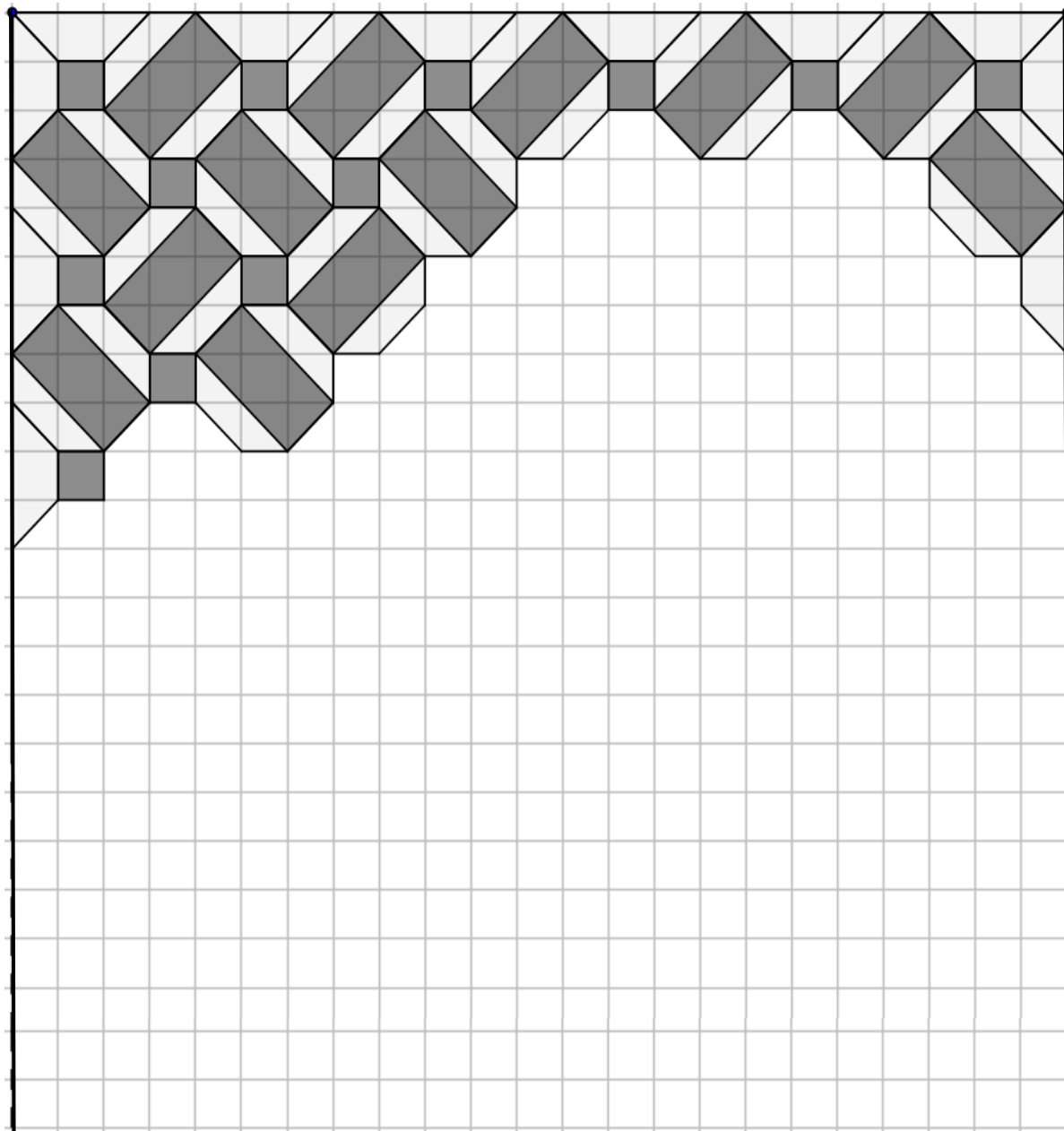
Origine : Campobasso

19. LA TABLE DU GRAND-PÈRE (Cat. 9, 10)

Jean est en train de mettre de l'ordre dans le grenier de son grand-père lorsqu'il découvre une vieille table et une boîte.

La table a une surface carrée qui fait apparaître le début d'un travail de marqueterie avec des pièces en bois foncé et des pièces en bois clair, créant un beau dessin.

Cette figure montre le fragment de la marqueterie.



La boîte contient les pièces nécessaires pour terminer la marqueterie.

Jean et son grand-père décident de travailler ensemble pour continuer le travail jusqu'à ce que toute la surface de la table soit recouverte de ces pièces.

Le travail terminé, quelle sera l'aire la plus grande : celle recouverte de pièces en bois foncé ou celle recouverte de pièces en bois clair ?

Montrez comment vous avez trouvé votre réponse à la question.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

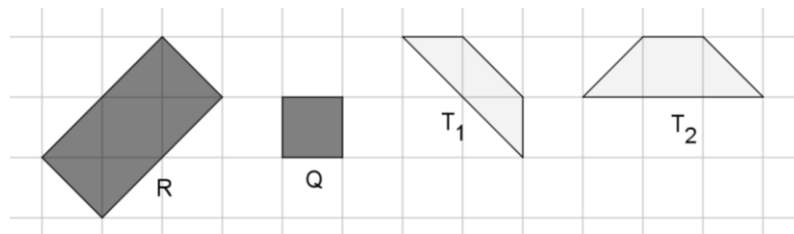
Étant donné un quadrillage de 23×23 carrés unités, avec un début de pavage par des polygones clairs et foncés (des rectangles foncés d'aire 4 carrés unités, un carré unité foncé et des trapèzes clairs d'aires 2 et 1,5 carrés unités), comparer les aires des parties claires et foncées en imaginant de compléter le pavage.

Analyse de la tâche

- Observer la figure ; reconnaître qu'il s'agit d'un motif régulier qui se répète sur un quadrillage de 23×23 , dont les côtés ont un motif différent.
- Compléter la figure puis compter 36 et 25 petits carrés et 60 polygones (octogones) pour placer les 60 rectangles d'aire 4 chacun. Trouver que l'aire foncée est de 301 carrés unités, donc supérieure à l'aire des pièces blanches qui mesure $23 \times 23 - 301 = 228$ carrés unités.

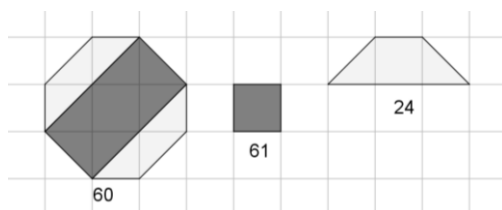
Ou

- Observer que la décoration est composée de polygones clairs et foncés, déterminer leurs aires en utilisant comme unité le carré du quadrillage et les compter de façon à trouver les aires totales claires et foncées. Une observation précise permet d'identifier des rectangles R (aire 4), des carrés Q (aire 1) foncés ; des trapèzes T_1 (d'aire 1,5) et des trapèzes T_2 (aire 2) clairs, ces derniers n'étant présents que sur les côtés.



Il y a différentes manières de déterminer les mesures des aires foncées et claires, regroupées par motifs (octogones, triangles, carrés, trapèzes). Par exemple :

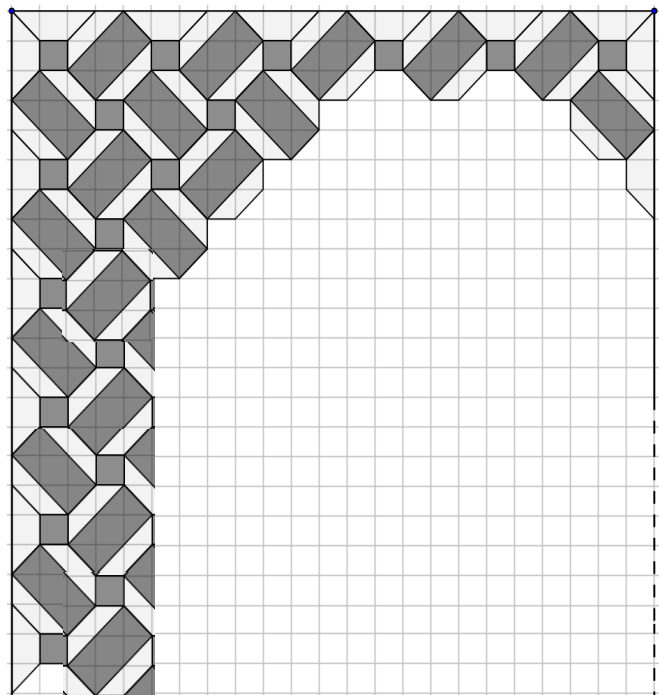
- Compter le nombre d'octogones qui contiennent un rectangle noir, le nombre de carrés noirs et le nombre de trapèzes T_2 : il y en a 6 par côté de la table, soit 24 au total représentant 48 carrés unités.
- Pour dénombrer les octogones, on peut remarquer que la première ligne en contient 5 et la deuxième, une fois complétée, en aura 6. Il y a donc 11 octogones pour ce motif qui se répète 5 fois sur 21 carreaux en hauteur, et il reste une ligne de 5 octogones sur les trois derniers carreaux, ce qui fait 60 octogones. On compte aussi 61 carrés unités ($11 \times 5 + 6 = 61$).



- Conclure que la partie foncée a une aire de 301 ($4 \times 60 + 61$) et la partie claire a une aire de 228 ($2 \times 1,5 \times 60 + 2 \times 24$).

Ou

- Remarquer que dans l'ensemble des octogones, l'aire foncée des rectangles équivalente à celle de 4 carreaux est supérieure à l'aire claire des deux trapèzes T_1 équivalente à 3 carreaux unités, et donc l'ensemble de la partie foncée des octogones dépasse la partie claire de 60 unités, alors que l'aire claire des trapèzes T_2 est seulement de 48 carrés unités. Conclure que la partie foncée a une aire supérieure à celle de la partie claire.



Attribution des points

- 4 Réponse correcte (la surface de bois foncé est la plus grande) avec un dessin complet et détermination de l'aire par comptage des 301 unités, ou la description claire et détaillée de la procédure suivie et des calculs effectués
- 3 Réponse correcte avec un dessin complet sans le comptage des 301 unités, ou avec des explications incomplètes ou peu claires (par exemple les calculs sont donnés mais il n'est pas dit comment le comptage a été effectué)
- 2 Dessin incomplet, mais montrant une procédure correcte
ou raisonnement correct mais procédure contenant une erreur de calcul, avec une réponse correcte ou erronée
- 1 Début de raisonnement et de comptage correct ou réponse sans explication
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Milano