

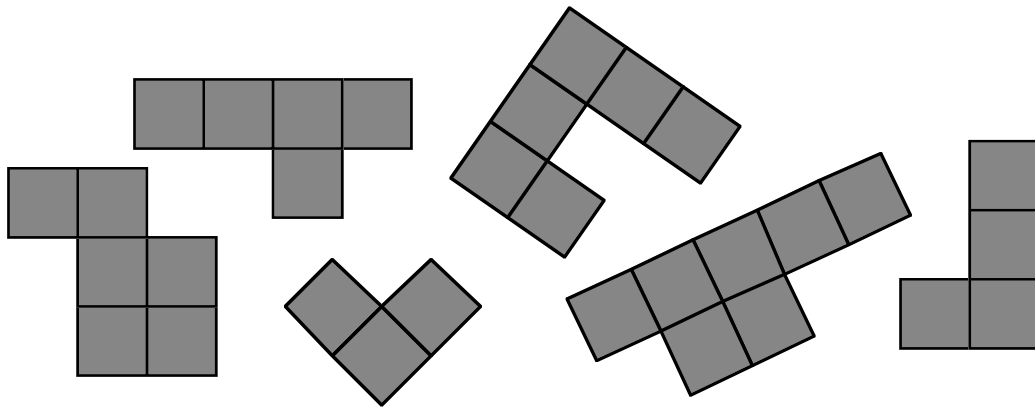
	<i>Titres</i>	<i>Catégories</i>	<i>Origine</i>	<i>Domaines</i>
1	Une pièce en trop	3	10.F.01	Recomposition d'un carré
2	Le nez de Pinocchio	3 4	7.II.04	Suite d'additions et soustractions
3	Une belle course	3 4 5	CB	Relations entre trois nombres add & mult.
4	Le code du coffre	3 4 5	BE	Relations entre les chiffres d'un nombre
5	Les petits trains	3 4 5	GTAL+UD	Pré algèbre, combinaison de trois prix en nombres naturels
6	Jeu de fléchettes	4 5 6	SI	Décomposition de 123 en unités, dizaines et centaines
7	Les boîtes de Catherine	4 5 6	PR	Développement et volume d'une boîte en forme de parallélépipède rectangle
8	Trois, quatre, cinq dinosaures ?	5 6 7	BB	Pré algèbre : prix de $3d + 15$ prix de $5d - 1$
9	Le vitrail	5 6 7 8	LY	Pavage avec des rectangles d'aires données
10	Quadrilatères	6 7 8	BB	Dessin de quadrilatères d'aire 2 sur une grille de $2 \times 2$
11	Nombres et dés	6 7 8	PR	Disposition optimale des chiffres (0-9) sur les faces de deux cubes
12	A la fromagerie	6 7 8	PU	Recherche de $4^e$ proportionnelle, en présence de trois grandeurs
13	Polygones	7 8 9 10	UD	Recherche de polygones, en fonction de leurs nombres de côtés
14	Une étrange multiplication	7 8 9 10	14.F.15	Multiples, algorithme de la multiplication
15	Un quatrième segment, et beaucoup de triangles	8 9 10	BB	Géométrie, dénombrement de triangles
16	Déplacements	9 10	MI	Lecture d'un graphique pour déterminer un itinéraire
17	Ballon	9 10	LU	Théorème de Pythagore
18	Marc et Luc en voyage	9 10	BL	Fuseaux horaires
19	Carrés et diagonales	9 10	7.I.20	Carrés d'une grille traversés par une diagonale

**1. UNE PIÈCE EN TROP** (Cat. 3)

Aurélie a formé un carré avec les cinq pièces de son puzzle.

Malheureusement, son petit frère Théo a défait le puzzle et a ajouté une sixième pièce, venant d'un autre puzzle.

Voici les six pièces :



**Reconstituez le puzzle carré d'Aurélie avec les cinq pièces et indiquez la pièce que Théo a ajoutée.**

**ANALYSE A PRIORI**

**Tâche mathématique**

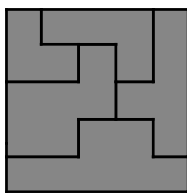
Composer un puzzle carré de 5 pièces à partir de six pièces dont l'une est en trop et identifier celle-ci

**Analyse de la tâche**

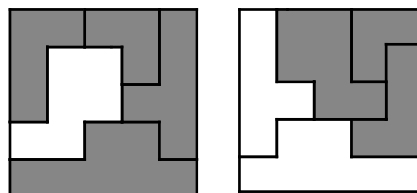
- Faire connaissance avec les pièces, en les découpant, les manipulant ou les reproduisant
- Reconstituer le puzzle par essais successifs.

Exemples de solutions (on accepte celles où une ou plusieurs pièces sont retournées)

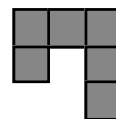
sans retourner de pièces



avec une ou deux pièces retournées



pièce en plus



Ou : déterminer le nombre de carrés des pièces ; constater que le puzzle devra avoir 25 ( $5 \times 5$ ) carrés, que le totale des carrés des six pièces est 31 et qu'il faudra donc écarter l'une des deux pièces de 6 carrés avant de commencer les essais.

**Attribution des points**

- 4 Un des puzzles reconstitué (dessin ou collage d'une des trois possibilités ci-dessus) et la pièce supplémentaire indiquée
- 3 Un des puzzles reconstitué, sans indiquer la pièce en trop
- 2 Un carré, avec au moins trois pièces correctes et les autres différentes de celles qui sont données, pièce en trop correcte
- 1 Un dessin ou reconstruction incorrecte : moins de trois pièces correctes, puzzle non carré, pièce en trop incorrecte
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3

Origine : 10.F.01

**2. LE NEZ DE PINOCCHIO** (Cat. 3, 4)

Le nez de Pinocchio a 5 cm de long.

Quand Pinocchio dit un mensonge, la Fée aux cheveux bleus l'allonge de 3 cm, mais quand il dit la vérité, la Fée le raccourcit de 2 cm.

À la fin de la journée, Pinocchio a dit 7 mensonges et son nez a 20 cm de long.

**Combien de fois Pinocchio a-t-il dit la vérité à la Fée au cours de la journée ?**

**Expliquez comment vous avez fait pour trouver la réponse.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Dans une suite de transformations additives (additions et soustractions) qui conduisent de 5 à 20 par 7 additions de 3 et quelques soustractions de 2, trouver le nombre de ces dernières.

**Analyse de la tâche**

- S'approprier la situation et comprendre ce qui se passe quand Pinocchio dit un mensonge (+3 cm) et quand il dit la vérité (-2 cm).
- Se rendre compte que l'ordre dans lequel sont effectuées les opérations, à partir de 5, n'est pas connu ; mais que l'on sait qu'il y aura 7 additions de 3 et qu'il faudra trouver le nombre, encore indéterminé, de soustractions de 2 pour arriver à 20.
- Procéder par essais en partant de la longueur initiale du nez (5 cm) en s'aidant éventuellement d'une représentation graphique : alterner les 7 allongements (+3) avec les diminutions (-2) pour arriver à 20.

Ou : additionner 7 fois le 3 pour arriver à 26 et soustraire 2 jusqu'à 20 (3 fois)

Ou : Trouver de combien s'allonge le nez en 7 mensonges  $7 \times 3 = 21$  cm, les ajouter au 5 cm initiaux, pour arriver à 26 cm avec les sept mensonges seulement et constater que, puisque le nez a 20 cm à la fin de la journée il s'est raccourci de 6 cm, ce qui représente 3 vérités ( $6 \div 2$  ou  $3 \times 2 = 6$ )

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (il a dit 3 fois la vérité) avec une description claire et détaillée (opérations ou repères sur la suite des nombres, récit des opérations)
- 3 Réponse correcte avec une description partielle ou peu claire
- 2 Réponse correcte sans explications  
ou réponse ne contenant qu'une seule erreur de calcul, avec description
- 1 Début de recherche cohérente, sans arriver à la conclusion  
ou réponse contenant plus d'une erreur de calcul
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 3, 4

**Origine :** 7.II.04

### 3. UNE BELLE COURSE (Cat. 3, 4, 5)

Dix enfants ont participé à une course. Ils portaient des dossards numérotés de 1 à 10.

En additionnant les numéros écrits sur les dossards des trois premiers arrivés, on obtient 19.

Le numéro écrit sur le dossard de l'enfant arrivé troisième est le double du numéro écrit sur le dossard de l'enfant arrivé deuxième.

**Trouvez, tous les numéros qui pourraient être écrits sur le dossard du premier, du deuxième et du troisième arrivés et écrivez-les dans l'ordre d'arrivée.**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Trouver, parmi les nombres de 1 à 10, trois d'entre eux dont la somme est connue (19), le dernier de ces trois nombres étant le double du second, dans un contexte de classement d'une course.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre que les nombres possibles vont de 1 à 10, qu'il faut en trouver trois dont la somme est 19 et que parmi ces trois nombres, le dernier est le double du deuxième, le premier nombre étant celui du premier arrivé.
- Procéder par essais plus ou moins organisés avec des triplets de nombres, en vérifiant si les conditions du problème sont vérifiées et trouver ainsi les trois « classements » (c'est-à-dire avec ordre interne 1<sup>e</sup>, 2<sup>e</sup>, 3<sup>e</sup>) : (10 ; 3 ; 6), (7 ; 4 ; 8), (4 ; 5 ; 10)

Ou, procéder systématiquement en écrivant toutes les sommes de 3 nombres pris parmi les nombres 1, 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9 et 10, puis retenir les triplets qui vérifient les deux conditions (somme égale à 19 et un nombre double de l'autre) et trouver ainsi les trois classements

Il y a encore de nombreuses autres manières de trouver les triplets et de mettre leur ordre en évidence.

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte : les trois classements (10 ; 3 ; 6), (7 ; 4 ; 8), (4 ; 5 ; 10) exprimée d'une manière ou d'une autre (par exemple « le premier a le dossard 10, le deuxième le 3 et le troisième le 6 ; ... ou par un tableau, avec une description claire et complète de la procédure (par la liste des essais ou la vérification des conditions : la somme 19 et les rapports entre le 2<sup>e</sup> et le 3<sup>e</sup>)
- 3 Réponse correcte, les 3 classements avec description partielle ou peu claire ou seulement 2 classements trouvés avec description claire et complète ou un des 3 classements ne respecte pas son ordre interne
- 2 Réponse correcte et complète sans explication ou seulement 2 classement trouvés avec description partielle ou peu claire ou seulement 1 classement trouvé avec description claire et complète ou 2 ou 3 des classements ne respecte pas leur ordre interne
- 1 Un ou deux classements trouvés sans explications ou classements qui ne tiennent pas compte de toutes les conditions (par exemple, somme 19 mais qui ne respectent pas les ordres internes ou le rapport entre 2<sup>e</sup> et 3<sup>e</sup>)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 3, 4, 5

**Origine :** Campobasso

#### 4. LE CODE DU COFFRE (Cat. 3, 4, 5)

Pour ouvrir son coffre-fort, Julie a besoin du code qui est un nombre à trois chiffres. Elle ne s'en rappelle plus mais elle est certaine que :

- le code est un nombre entre 500 et 600,
- deux chiffres sont identiques,
- la somme des chiffres est 17.

**Quels sont les codes possibles qui permettent d'ouvrir le coffre de Julie ?**

**Montrez comment vous avez trouvé vos réponses.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Trouver les nombres naturels compris entre 500 et 600 dont la somme des chiffres est 17 et dont deux chiffres sont identiques.-

##### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il peut y avoir plusieurs codes et qu'il faut les donner tous.
- Comprendre que le premier chiffre du code est nécessairement 5.
- Passer au crible tous les nombres compris entre 500 et 600 en ne conservant que ceux qui ont au moins deux chiffres identiques et dont la somme des chiffres fait 17 (ou mieux – car plus rapide et strictement équivalent – dont la somme des deux derniers chiffres fait 12).

Ou : limiter la génération des codes à ceux dont la somme des deux derniers chiffres fait 12, soit 539 – 548 – 557 – 566 – 575 – 584 - 593.

- Ne conserver dans la liste précédente que ceux qui ont deux chiffres identiques.

Ou : Comprendre qu'il faut deux chiffres identiques et essayer d'abord avec le 5. Si on a deux chiffres 5, le troisième est nécessairement 7 pour que la somme fasse 17. On a les codes 557 et 575.

- Chercher un autre chiffre que le 5 en double. Comme il faut que le double de ce chiffre soit égal à 12, il ne peut s'agir que de 6. On a alors le code 566.
- Remarquer que l'on a exploité tous les cas à partir des conditions « être entre 500 et 600 » (donc commencer par 5) et « avoir deux chiffres identiques » (donc 5 ou un autre).

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (les trois codes 557, 566 et 575) avec des explications claires et complètes de la procédure utilisée (par exemple la liste des tentatives, contrôles et vérification du respect des contraintes, ...)
- 3 Réponse correcte (les trois codes) avec explications partielles ou peu claires (liste sans explicitation des sélections) ou, seulement 2 codes avec explications claires
- 2 Réponse correcte (les trois codes) sans explications ou, seulement 2 codes avec explications partielles ou, seulement 1 code avec explications claires
- 1 Début de recherche correcte, avec des propositions respectant au moins 2 des 3 contraintes ou, seulement 2 codes sans explications ou, seulement 1 code avec explications partielles ou peu claires ou sans explications
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4, 5

Origine : Belgique

## 5. LES PETITS TRAINS (Cat 3, 4, 5)

Un magasin de jouets vend des locomotives, des wagons passagers et des wagons marchandises pour construire le train que l'on désire.



Les trois éléments ont des prix différents.

Toutes les locomotives ont le même prix, tous les wagons passagers ont le même prix, tous les wagons marchandises ont le même prix.



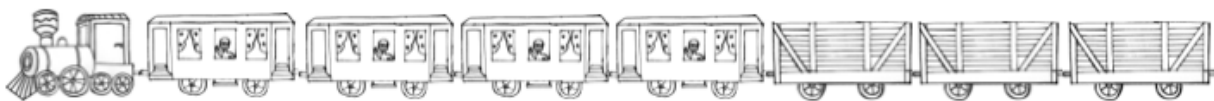
Ce train coûte 35 euros



Ce train coûte 25 euros



Ce train coûte 34 euros



**Quel est le prix de ce train ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

À partir de trois compositions différentes de trois objets dont on connaît le prix, trouver le prix d'une quatrième composition de ces trois objets. ( $L + 5P + M = 35$  -  $L + 3P + M = 25$  -  $L + 3P + 4M = 34$  →  $L + 4P + 3M = ?$ )

#### Analyse de la tâche

- Comprendre que les trois éléments qui composent le train ont chacun un coût différent et que les éléments d'un même type ont le même prix.
- Analyser les trois différentes combinaisons et relever le nombre de chaque élément de chacune : (Train 1 : 1 locomotive ; 5 wagons de passagers ; 1 de wagon de marchandises - Train 2 : 1 l, 3wp, 1 wm - Train 3 : 1 l ; 3 wp, 4 wm - Train 4 : 1 l, 4 wp, 3 wm.)
- Se rendre compte que pour obtenir le coût du train à acheter il est nécessaire de confronter les nombres de différents éléments dont est composé chaque train.
- Trouver la valeur de chaque élément :  
 Pour trouver le coût d'un wp : partir de la différence entre le train 1 et le train 2 qui est de 2 wp et donc la différence de prix 10 € ( $35 - 25$ ) est équivalente à celle de ces deux wagons. Le prix d'un wp sera alors de 5 €.  
 Pour trouver le coût d'un wm : partir de la différence entre le train 2 et le train 3 qui est de 3 wm et donc la différence de prix 9 € ( $34 - 25$ ) est équivalente à celle de ces trois wagons. Le prix d'un wm sera alors de 3 €.

Pour trouver le coût d'une locomotive : on peut partir de n'importe quel train dont on connaît le prix en calculant le coût des  $w_p$  et des  $w_m$  et en le soustrayant du coût total : (train 1 :  $35 - (5 \times 5 + 3) = 7$ ; train 2 :  $25 - (5 \times 3 + 3) = 7$ ; train 3 :  $40 - (3 \times 5 + 6 \times 3) = 7$

- Calculer la valeur du dernier train : 7 ( $l$ ), 5 ( $w_p$ ), 3 ( $w_m$ ) :  $7 + (4 \times 5) + (3 \times 3) = 36$  (en €).

Ou : Procéder par essais plus ou moins organisés, en choisissant par exemple une valeur pour un des éléments et vérifiant à chaque fois si la valeur hypothétique correspond aux prix connus.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (36 euros) avec l'indication claire de la procédure suivie (détermination des prix des différents wagons et éventuellement de la locomotive et, en cas de procédure par essais, vérification des prix)
- 3 Réponse correcte (36 euros) avec une procédure peu claire ou incomplète (par exemple sans les prix de chaque élément, ou sans les calculs permettant de trouver le prix total et, en cas de procédure par essais, sans les vérifications )
- 2 Réponse correcte (36 euros) sans aucune explication  
ou réponse fautive due à une erreur de calcul
- 1 Début de recherche qui montre une compréhension de la situation (par exemple quelques essais pour trouver le coût des trois éléments, sans aboutir)
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Groupe Algèbre + Udine (reprise de *Pièces magnétiques*, 24,I,13)

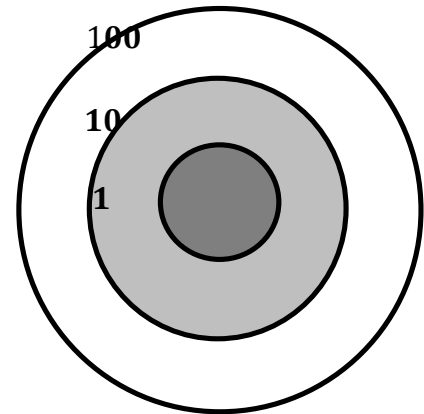
## 6. JEU DE FLÉCHETTES (Cat. 4, 5, 6)

Tom joue aux fléchettes.

Il a 25 fléchettes et une cible comme celle-ci :

Lorsqu'il tire une fléchette Tom obtient :

- 100 points s'il touche la zone « 100 »,
- 10 points s'il touche la zone « 10 »,
- 1 point s'il touche la zone « 1 »,
- 0 point s'il manque la cible.



Après avoir tiré toutes ses fléchettes, Tom a obtenu 123 points.

**Combien de fléchettes peuvent avoir touché la cible, et dans quelles zones ?**

**Indiquez toutes les possibilités et, pour chacune d'elles, dites quel est le nombre de fléchettes dans la cible et dans chaque zone).**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Trouver tous les nombres possibles de termes 1, 10 et 100 (au maximum 25) dont la somme est 123.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre comment est constituée la cible : la zone extérieure vaut un point, la zone intermédiaire 10 points et la centrale 100 points et l'extérieur vaut 0 point.
- Comprendre que toutes les fléchettes lancées permettent à Tom d'accumuler des points jusqu'à arriver à 123 et qu'il n'y en a pas nécessairement 25 dans la cible (les autres peuvent être en dehors de la cible).
- Se rendre compte que dans la zone centrale on ne peut trouver au maximum qu'une fléchette (sinon, le score serait égal ou supérieur à 200), dans la zone intermédiaire au maximum 12 fléchettes (sinon, le score serait égal ou supérieur à 130), dans la zone externe au maximum 23 fléchettes (sinon, s'il y en avait 24 il ne serait pas possible d'obtenir avec la fléchette restante le score de 123, ce qui ne serait pas le cas non plus si les 25 fléchettes étaient dans cette zone).
- Procéder par essais erreurs, organisés si possible, et décomposer le nombre 123 en une somme de centaines, dizaines et unités, en gardant à l'esprit qu'une centaine correspond à une fléchette dans la zone centrale, une dizaine à une fléchette dans la zone intermédiaire et une unité à une fléchette dans la zone extérieure.
- Penser à contrôler le nombre de fléchettes pour chaque décomposition trouvée :
  - 6 fléchettes :  $1 \times 100 + 2 \times 10 + 3 \times 1 = 123$
  - 15 fléchettes :  $1 \times 100 + 1 \times 10 + 13 \times 1 = 123$  ou  $12 \times 10 + 13 \times 1 = 123$
  - 24 fléchettes :  $1 \times 100 + 23 \times 1 = 123$  ou  $11 \times 10 + 13 \times 1 = 123$

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte et complète : 6, 15, 24 (avec l'inventaire complet des cinq possibilités, voir ci-dessus)
- 3 Réponse correcte mais incomplète : les 3 nombres 6, 15, 24, mais seulement une possibilité de positionnement de fléchettes pour 15 et /ou 24  
ou réponse incomplète 6, 15 ou 6, 24, mais avec les deux possibilités pour 15 et /ou 24  
ou identification correcte de toutes les possibilités de positionnement mais pas d'explicitation du nombre de fléchettes  
ou réponse avec les cinq possibilités correctes et une ou deux des possibilités avec 33 ou 123 fléchettes ( $10 \times 10 + 23 \times 1$  ou  $123 \times 1$ ) ne respectant pas le maximum de 25 fléchettes
- 2 Réponse correcte mais incomplète 6, 15 ou 6, 24 et seulement un positionnement de fléchettes pour chaque cas  
ou indication de trois possibilités de positionnement des fléchettes sans explicitation du nombre de fléchettes
- 1 Début de raisonnement correct : seule la possibilité avec 6 fléchettes a été trouvée  
ou réponse correcte mais incomplète (6, 15, 24) sans indication de la position des fléchettes  
ou trois positionnements indiqués dont un est erroné
- 0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

## 7. LES BOÎTES DE CATHERINE (Cat. 4, 5, 6)

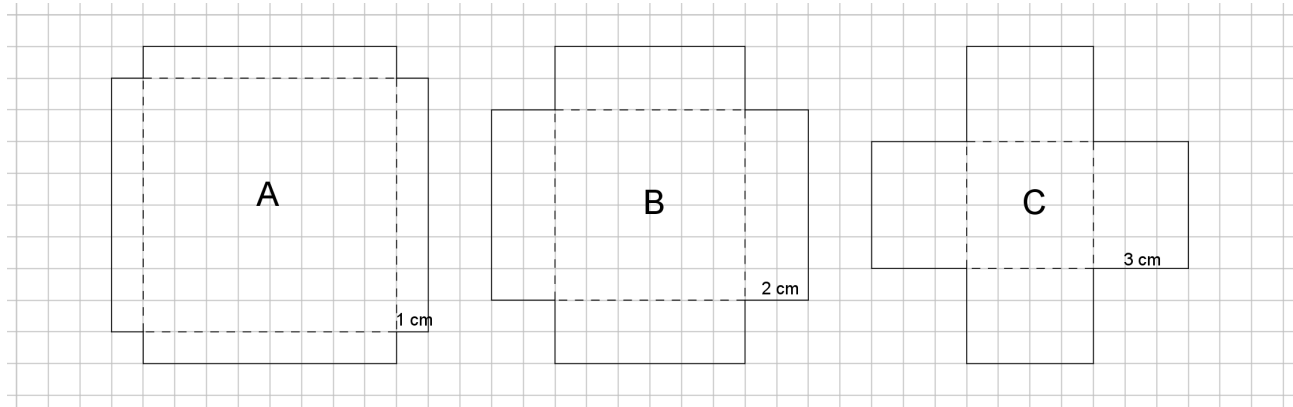
Catherine a 70 cubes dont toutes les faces ont 1 cm de côté

Elle désire construire une boîte sans couvercle qui pourra les contenir tous.

Elle prend trois feuilles cartonnées carrées, dont les côtés mesurent 10 cm.

Dans chacune de ces feuilles, elle découpe un petit carré de chaque angle : dans la feuille A le côté de chaque petit carré mesure 1 cm, dans la feuille B il mesure 2 cm et dans la feuille C il mesure 3 cm.

Voici les trois feuilles cartonnées avec les petits carrés découpés.



Catherine plie chaque feuille selon les lignes en pointillés et construit les trois boîtes sans couvercle en collant les faces avec du papier adhésif.

**Quelle boîte pourra contenir tous les cubes de Catherine, sans que ceux-ci ne dépassent de la boîte ?**

**Montrez comment vous avez trouvé la boîte demandée et pourquoi Catherine ne peut choisir que cette boîte.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

A partir de trois développements partiels de boîtes à base carrée (sans couvercle), imaginer les solides correspondant et déterminer si on peut y placer 70 cubes de 1 cm d'arête.

#### Analyse de la tâche

- Observer les figures et se rendre compte qu'elles montrent les trois cartons carrés après le découpage des petits carrés dans les angles de longueurs de côtés (1 cm, 2 cm, 3 cm) c'est-à-dire les développements de trois boîtes de dimensions différentes
  - Se rendre compte que, en pliant les cartons selon les lignes pointillées et en faisant se rejoindre les faces latérales, on obtient des parallélépipèdes rectangles de hauteurs différentes dont les bases sont des carrés de mesures aussi différentes.
  - Comprendre que la hauteur de chaque boîte est égale au côté des petits carrés découpés dans les angles et que sur chaque niveau (couche) on pourra disposer au maximum le même nombre de cubes que sur la base.
  - Comprendre que pour pouvoir remplir les boîtes avec le maximum de cubes, il faut les disposer l'un contre l'autre afin de ne pas laisser d'espaces vides entre eux.
  - Se rendre compte que, en comptant les carreaux, que les bases des boîtes ont des aires respectives de 64, 36 et 16 carrés et que chaque cube a ses faces égales à ces carrés.
  - Puisque la hauteur de la boîte A est égale à l'arête d'un cube, on la remplira avec une seule couche de 64 cubes ( $8 \times 8$ ), alors que la boîte B peut contenir 72 cubes au maximum ( $36 + 36$  ou  $36 \times 2$ ), boîte C peut contenir trois couches de cubes, donc 48 ( $16 + 16 + 16$  ou  $16 \times 3$ ).
  - Conclure que l'unique boîte qui peut contenir les 70 cubes est la boîte B
- Ou : découper les figures et construire les boîtes en utilisant du papier adhésif pour rejoindre les faces latérales ; si des cubes de 1 cm d'arête sont à disposition, remplir les boîtes et compter les cubes.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (boîte B) avec, description claire et complète (au moins, la détermination du nombre de cubes maximum que chaque boîte peut contenir : B (72) et A (64) ou C (48) et les raisons du choix de la boîte B  $72 > 70$ , alors que 64 et 48 sont plus petits que 70.
- 3 Réponse correcte (boîte B) avec description partielle de la procédure (par exemple détermination de 72, 64 et 48, sans expliquer le choix de la boîte B)
- 2 Réponse correcte (boîte B) sans description de la procédure ou calcul du nombre de cubes par boîte (72, 64 et 48) sans le choix de la boîte B
- 1 Début de recherche cohérent ou calcul, par exemple détermination de la surface de base de chaque boîte : 64, 36 et 16 ou réponse affirmant que la boîte A est trop basse et que la boîte C est trop étroite sans tenir compte des autres dimensions
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 4, 5, 6

**Origine :** Parma

**8. TROIS, QUATRE OU CINQ DINOSAURES ?** (Cat. 5, 6, 7)

Avec son argent, Tom veut s'acheter des modèles de dinosaures.

Dans le magasin de jouets, ces modèles sont tous au même prix.

Tom constate que :

- s'il achète trois dinosaures, il lui restera 15 €.
- mais pour acheter cinq dinosaures, il lui manque 11 €.

**Tom a-t-il assez d'argent pour acheter quatre dinosaures ?**

**Si oui, combien d'argent lui restera-t-il ?**

**Si non, combien d'argent lui manquera-t-il ?**

**Montrez comment vous avez trouvé votre réponse.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver le prix de 4 objets identiques sachant que le prix de 3 objets augmenté de 15 € est égal au prix de 5 objets diminué de 11 €.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que le prix de trois dinosaures augmenté de 15 € est égal au prix de cinq dinosaures diminué de 11 € et que cette somme est égale à l'avoir de Tom.
- Comprendre qu'il faut trouver le prix de quatre dinosaures et la somme d'argent possédée par Tom et comparer ces 2 valeurs.
- Procéder par essais et ajustements pour déterminer le prix d'un dinosaure, en respectant les contraintes de l'énoncé. Ayant déterminé ce prix (13 €) :  
soit chercher le prix de quatre dinosaures (52 €) et l'avoir de Tom ( $3 \times 13 \text{ €} + 15 \text{ €} = 54 \text{ €}$  ou  $5 \times 13 \text{ €} - 11 \text{ €} = 54 \text{ €}$ ) et conclure qu'il peut acheter les quatre dinosaures, car ils coûtent 52 € et que Tom dispose de 54 € ;  
soit remarquer qu'avec les 15 € qui lui restent après achat de trois dinosaures, il peut encore en acheter un et qu'il lui reste encore 2 €.

Ou procéder par déductions :

La différence de prix entre trois dinosaures et cinq dinosaures est égale à 26 € (15 + 11). Elle correspond donc au prix de deux dinosaures, ce qui permet de trouver le prix d'un dinosaure (13 €). Terminer en utilisant l'un des deux raisonnements qui précèdent.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (oui, il peut acheter quatre dinosaures et il lui restera 2 €, ou seulement il lui restera 2 €), avec des explications claires et complètes (détail des essais pour la détermination de 13 € ou vérification à partir du prix trouvé)
- 3 Réponse correcte avec des explications partielles ou peu claires  
ou réponse « oui », sans indiquer le reste de 2 €, avec explications claires de la détermination du prix
- 2 Réponse correcte sans explications  
ou démarche correcte et bien expliquée, mais conclusions erronées à la suite d'une erreur de calcul.
- 1 Début de recherche correcte montrant une compréhension de la situation  
ou réponse « oui » sans explications
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 5, 6, 7

**Origine :** Bourg-en-Bresse

**9. LE VITRAIL** (Cat. 5, 6, 7, 8)

Claire réalise des vitraux composés de rectangles (les carrés sont aussi des rectangles).  
Voici le plan de sa dernière construction :

					4
		6	2		
3					
				8	
			9		
	4				

Le nombre écrit dans chaque rectangle est le nombre de carreaux dont il est formé.

Claire veut réaliser un autre vitrail composé de 11 rectangles : un de 20 carreaux, un de 14 carreaux, trois de 12 carreaux, un de 9 carreaux, un de 6 carreaux, deux de 5 carreaux, un de 3 carreaux et un de 2 carreaux, selon le projet ci-dessous :

					14				
	12								
			12						
		12							5
6					20				
		9							
				2					
							5		3

(Les nombres de carreaux dont sont formés les rectangles sont déjà écrits à l'intérieur de chacun d'eux.)

**Dessinez sur ce projet les rectangles que Claire aura sur son vitrail.**

*(Si vous ne les trouvez pas tous dessinez au moins ceux que vous avez trouvés)*

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Dans une grille à cases carrées, tracer des rectangles permettant de la paver en connaissant pour chacun d'eux leur aire (avec une case de la grille comme unité d'aire) et l'emplacement d'une case qu'il couvre.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre à l'aide du plan du premier vitrail réalisé par Claire (illustration en début d'énoncé) que chaque nombre représente l'aire en nombre de cases de chaque rectangle et est écrit dans une case de celui-ci ;
- Procéder par déductions successives, en commençant par les rectangles pour lesquels une seule solution est possible, par exemple F et K sur la solution ci-dessous :

					14				
	A				B				
	12			C					D
			12						
E		12	F			G			5
6					20				
		9		I					
		H		2					K
						J	5		3

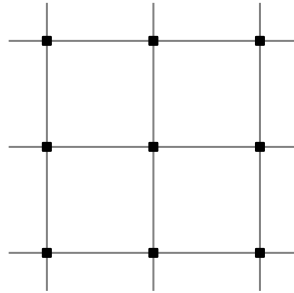
**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (les 11 rectangles tracés à la bonne place)
- 3 Réponse avec 9 ou 10 rectangles bien tracés sans autre rectangle erroné (il peut rester des trous)
- 2 Réponse montrant 7 ou 8 rectangles bien tracés sans rectangles erronés  
ou plus de 7 rectangles bien dessinés mais présence d'erreurs (superpositions ...)  
ou pavage de la grille avec 11 rectangles respectant les dimensions mais pas les positions (ne couvrant pas le carreau avec la taille).
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple : au moins 6 rectangles correctement placés).  
ou réponse avec plus de 6 erreurs ou oublis  
ou réponse (même partielle) erronée du point de vue des positions mais cohérente du point de vue du nombre de cases
- 0 Incompréhension du problème ou moins de 6 rectangles

**Niveau :** 5, 6, 7, 8

**Origine :** Lyon

### 10. QUADRILATÈRES (Cat. 6, 7, 8)



Juliane désire construire, sur cette grille composée de quatre carrés, le plus grand nombre de quadrilatères qui respectent les conditions suivantes :

- leurs quatre sommets doivent être sur des nœuds de la grille,
- leur aire doit être égale à celle de 2 carrés de la grille,
- ils doivent être tous différents (on ne peut pas les superposer exactement en les déplaçant ou en les retournant).

**Combien de quadrilatères différents Juliane pourra-t-elle trouver ?**

**Dessinez-les tous.**

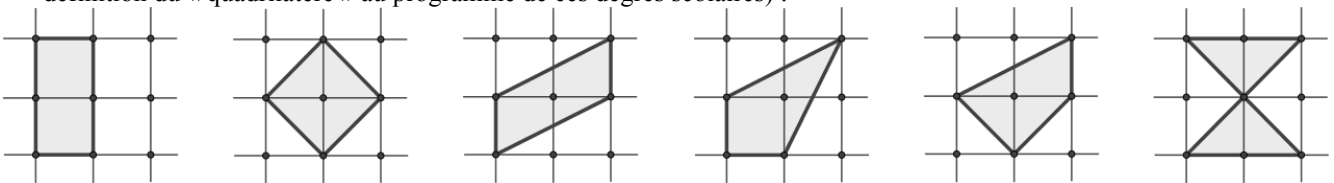
#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Sur un quadrillage à maille carrée ( $2 \times 2$ ), dessiner tous les quadrilatères qui ont pour sommets des nœuds du quadrillage et dont l'aire est 2 (en carreaux du quadrillage).

##### Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : aire 2 et sommets sur les nœuds du quadrillage
  - Chercher les quadrilatères : le rectangle apparaît automatiquement, puis le carré et le parallélogramme non rectangle et, enfin, ceux qui sont moins familiers. On peut s'occuper soit de l'aire du quadrilatère, soit de l'aire de la grille non recouverte par le quadrilatère, qui valent toutes les deux 2 (carrés).
  - Vérifier qu'il n'y ait pas plusieurs quadrilatères isométriques (ou superposables par une rotation, translation ou « retournement » / symétrie axiale)
  - Dessiner les quadrilatères, sur la même grille avec des couleurs différentes ou sur plusieurs grilles.
- Les cinq solutions attendues (avec une sixième, le quadrilatère croisé, qui pourrait apparaître éventuellement selon la définition du « quadrilatère » au programme de ces degrés scolaires) :



##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (le dessin des 5\* quadrilatères corrects), sans erreur ou doublon
- 3 Une seule erreur (doublon, oubli, figure non quadrilatère, aire différente de 2)
- 2 Deux erreurs (doublon, oubli, figure non quadrilatère, aire différente de 2), par exemple le dessin de 5 quadrilatères dont un doublon correspond à deux erreurs : un doublon et un oubli.
- 1 Trois erreurs (doublon, oubli, figure non quadrilatère, aire différente de 2)
- 0 Incompréhension du problème ou un seul quadrilatère correct trouvé
- \* **Au cas où le quadrilatère croisé d'aire 2 est dessiné on l'accepte évidemment, mais sans modifier l'attribution des points.**

Catégories : 6, 7, 8

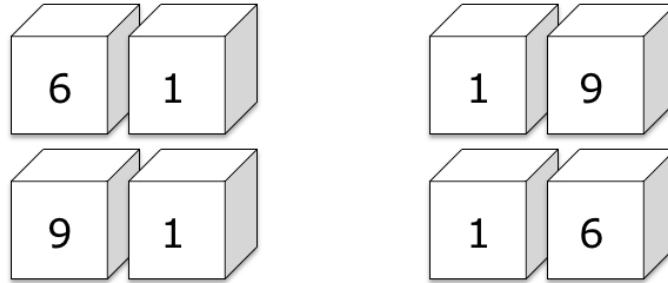
Origine : Bourg-en-Bresse

## 11. NOMBRES ET DÉS (Cat. 6, 7, 8)

André a fabriqué deux dés en forme de cubes.

Il veut écrire sur chaque face un des dix chiffres, de telle sorte qu'en disposant les deux dés l'un à côté de l'autre, on puisse former des nombres entiers à deux chiffres.

Par exemple, en plaçant les dés de manière que sur l'un d'eux soit visible le chiffre 1 et sur l'autre le chiffre 6, selon les positions des deux dés, on peut lire les nombres : 16, 61, 19 ou 91.



André veut former tous les nombres à partir de 10 (10, 11, 12, 13, ...) sans en sauter un seul. Il se demande quel chiffre écrire sur chaque face pour pouvoir former la plus grande suite de nombres successifs.

**Quels sont les chiffres qu'il faut écrire sur les faces d'un des deux dés ?**

**et quels sont ceux qu'il faut écrire sur les faces de l'autre dé ?**

**Écrivez le plus grand nombre de la suite qu'André pourra former.**

**Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Écrire 12 chiffres, de 0 à 9, sur les faces de deux dés cubiques de manière qu'en les disposant judicieusement, on puisse présenter la suite des nombres entiers à partir de 10 sans interruption et en obtenir le plus grand nombre possible.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on dispose de 12 faces, 6 par dé sur lesquelles on doit écrire dix chiffres, on devra donc nécessairement ne choisir que quelques chiffres pour chaque dé.
- Observer sur l'exemple que le 6 tête-bêche se lit 9 et donc si sur un dé on écrit par exemple le chiffre 6, il est inutile d'écrire le chiffre 9.
- Comprendre que, en utilisant deux dés, il y a plus de faces (douze) que de chiffres à écrire (neuf) : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6/9 ; 7 ; 8, donc trois chiffres devront figurer sur les deux les dés.
- Se rendre compte que, pour écrire les nombres qui ont le même chiffre comme unité et comme dizaine, il faut que ce chiffre soit écrit sur les deux les dés. Il y en a trois qui sont les seuls chiffres qui peuvent être répétés. Pour que la suite des entiers ne soit pas interrompue, il faut que ce soient nécessairement 1, 2 et 3 pour pouvoir former les nombres 11, 22 et 33. La suite des entiers se terminera par le nombre 43, il ne sera pas possible de former le nombre 44.
- Comprendre que pour combiner tous les nombres entiers successifs à partir de 10, les chiffres 0 et 4 doivent être écrits sur deux dés différents pour pouvoir former le nombre 40, alors que 5, 6/9, 7, 8 peuvent être écrits sur l'un ou l'autre dé indifféremment.
- Conclure qu'il faut écrire les chiffres 0, 1, 2, 3 sur un dé et 1, 2, 3, 4 sur l'autre, puis écrire sur les quatre autres faces les chiffres 5, 6/9, 7, 8, indifféremment.

Ou, procéder par essais en écrivant sur les faces de deux cubes ou de leur développement ou encore l'aide d'un tableau les différents nombres qu'on peut obtenir à partir de 10, pour arriver à la conclusion ci-dessus.

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte : (sur un dé les chiffres 0, 1, 2, 3 sur l'autre les chiffres 1, 2, 3, 4 alors que les chiffres restants peuvent être indifféremment sur l'un ou sur l'autre, et le nombre 43 ou la succession des nombres de 10 à 43) avec explication claire de la démarche (quelques considérations du genre de celles de l'analyse de la tâche)
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes  
Ou réponse correcte et bien expliquée à la question mais il manque le nombre 43 ou la succession

- 2 Réponse correcte, sans explications  
ou réponse erronée (1, 2, 3 sur les deux dés et 0 et 4 sur un même dé). avec le dernier nombre différent de 43 ou la succession
- 1 Réponse erronée (1, 2 sur les deux les dés et 0 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9 répartis sur les deux dés)  
ou début de recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 6, 7, 8

**Origine :** Parma, (Inspiré de *Le calendrier* 12-I-15)

## 12. À LA FROMAGERIE (Cat. 6, 7, 8)

En se promenant dans les rues de la capitale de Transalpie, un groupe de touristes entre dans une fromagerie et achète une pièce de fromage pour 30 euros.

Ils trouvent le prix très élevé, mais la vendeuse leur explique que pour obtenir un kg de fromage de ce type il faut 10 litres de lait et que pour cette pièce il a fallu 12,5 litres de lait.

**Quel est le prix de un kg de fromage de ce type ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Déterminer le coût d'un kg de fromage connaissant : le coût d'une pièce de ce fromage (30 €) ; le rapport entre 1 kg fromage et le lait nécessaire à sa fabrication (10 l) et la quantité de lait utilisée pour la pièce de fromage (12,5 l)

#### Analyse de la tâche

- Distinguer les trois grandeurs en jeu (masse de fromage, volume de lait et prix).
- Raisonner, plus ou moins consciemment, sur les rapports constants entre ces grandeurs, par exemple :
  - Calculer le rapport constant entre la masse du fromage et la quantité de lait ( $10/12,5 = 4/5$  ou 0,8) et procéder directement par le calcul du coût de 1 kg de fromage ( $30 \div 5 \times 4 = 24$  euros) ou, de même,  $12,5 \div 10 = 1,25$  et  $30 \div 1,25 = 24$ .
  - Ou diviser 30 par 12,5 pour obtenir le prix pour 1 litre de lait et multiplier par 10 le prix de 10 litres : 24 euros.
  - Ou comprendre que le rapport entre les deux données 10 et 12,5 des volumes de lait est  $5/4$  donc la dépense de 30 euro est la somme du prix de 1 kg et de  $1/4$  de kg de fromage, c'est à dire 24 euro et 6 euro.
  - Ou, à partir de l'équivalence 1 kg = 1000 g, observer mentalement que : si 10 litres de lait donnent 1000 g de fromage, 12,5 litres donnent 1250 g de fromage. Puis, comme le partage en 5 parties de  $1250 = 4 \times 250 + 250$  (en grammes) se reporte sur le partage en 5 parties de 30 euro ; le prix de 250 g de fromage est 6 euro et le prix d'un kilo est 24 euro.

Ou procéder par essais : donner un prix hypothétique à un kilo de fromage, le multiplier par le poids du fromage de 1,25 kg (obtenu par exemple avec la division  $12,5 \div 10$ ) et vérifier si on obtient 30 euros ; modifier le prix hypothétique jusqu'à atteindre 24 euros.

Ou (au niveau d'expert, à partir de cat. 7) expliciter l'écriture des proportions :

Par exemple écrire la proportion  $10 \div 1000 = 12,5 \div x$ , où  $x$  est la masse du fromage acheté, en grammes, pour obtenir  $x = 1250$  g (ou 1,25 kg). Puis par une seconde proportion ( $1000 \div 1250 = y \div 30$ , où  $y$  est le prix du fromage par kg, pour obtenir;  $y = 24$  euro euros).

#### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (24 euros) avec le détail de la procédure (rapports, proportions, en spécifiant les quantités qui y interviennent)
- 3 Réponse correcte (24 euros) avec des procédures non expliquées par le détail
- 2 Réponse correcte (24 euros) sans explication  
ou procédure complète et correcte avec une seule erreur de calcul
- 1 Début de raisonnement correct où la présence d'un rapport est mise en évidence  
ou écriture incorrecte de la proportion (par exemple  $10 \div 1000 = x \div 12,5$ )  
ou perception du rapport  $4/5$  et conclusion erronée due à l'inversion  $30 \div 4 \times 5$ )
- 0 Incompréhension du problème

Niveau : 6, 7, 8

Origine : Puglia

**13. POLYGONES** (Cat. 7, 8, 9, 10)

Le professeur Hypoténuse a demandé à chacun de ses 24 élèves de dessiner et découper trois polygones choisis parmi des triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones.

Le professeur recueille et observe toutes les figures et note que :

- il y a en tout 300 côtés,
- il y a autant d'hexagones que de quadrilatères,
- pour chaque pentagone il y a 5 triangles.

**Combien y a-t-il de triangles, de quadrilatères, de pentagones et d'hexagones ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver, dans un ensemble de 72 triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones présentant 300 côtés en tout, le nombre de chacun de ces polygones sachant qu'il y a autant de quadrilatères que d'hexagones, que le nombre des triangles est le quintuple de celui des pentagones

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'on est en présence de 72 polygones ( $24 \cdot 3$ ) dont on fait l'inventaire des côtés (300) et des relations entre les nombres des triangles, quadrilatères, pentagones et hexagones et que la demande est de déterminer chacun de ces nombres
- Procéder par essais organisés en vérifiant les contraintes. Par exemple : s'il y avait 1 pentagone, il y aurait 5 triangles, et 33 quadrilatères et hexagones  $(72 - 6) \div 2 = 33$  ; ce qui donnerait 350 côtés :  $1 \cdot 5 + 5 \cdot 3 + 33 \cdot 6 + 33 \cdot 4 = 350$ , ce qui ne correspond pas aux données, ...
- Poursuivre en augmentant le nombre des pentagones pour trouver la solution : 6 pentagones, 30 triangles, 18 quadrilatères et hexagones,  $(72 - 36) \div 2 = 18$ , et le nombre des côtés :  $6 \cdot 5 + 30 \cdot 3 + 18 \cdot 6 + 18 \cdot 4 = 300$   
Le même genre de procédure est évidemment possible en organisant les essais à partir du nombre des autres polygones que les pentagones ou en tenant compte du nombre total de côtés (300) pour vérifier que le nombre de polygones est bien 72.

Ou : Observer que dans un groupe de 1 pentagone et 5 triangles il y a 20 côtés et que dans un groupe de 1 quadrilatère et 1 hexagone il y a 10 côtés, ce qui fait 30 côtés en tout. S'il y avait 10 groupes d'un type et 10 groupes de l'autre on aurait bien 300 côtés mais 80 figures. Constaté alors qu'avec 9 groupes du premier type, on aurait 20 côtés de moins qui devraient être récupérés par deux groupes du second type ; on aurait alors 12 quadrilatères et 12 hexagones, avec un nombre total de 78 polygones :  $9 + 45 + 12 + 12 = 78$ . Essayer encore avec 8, 7 et 6 et vérifier que dans ce cas il y aurait 72 figures et 300 côtés.

Ou : Poser un système d'équation, par exemple avec a : nombre de pentagones et b : nombre d'hexagones et quadrilatères

$$\left. \begin{array}{l} 5a + 5 \times 3a + 6b + 4b = 300 \rightarrow 20a + 10b = 300 \rightarrow 2a + b = 30 \\ a + 5a + b + b = 72 \rightarrow 6a + 2b = 72 \rightarrow 3a + b = 36 \end{array} \right\}$$

dont la solution  $a = 6$  et  $b = 18$ , c'est à dire 30 triangles, 18 quadrilatères, 6 pentagones et 18 hexagones

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte : 30 triangles, 18 quadrilatères, 6 pentagones et 18 hexagones avec explications qui font comprendre clairement la procédure suivie (72 polygones, équations ou au moins trois essais, dont la solution)
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes ou seulement une vérification de la solution
- 2 Réponse correcte sans explication
- 1 Réponse erronée : on a tenu compte seulement des 300 côtés (par exemple : 1 pentagone, 5 triangles, 28 quadrilatères et 28 hexagones) ou seulement du nombre total des figures (par exemple : 3 pentagones 15 triangles, 27 quadrilatères et 27 hexagones)
- 0 Incompréhension du problème ou seulement le nombre total des figures

**Niveaux :** 7, 8, 9, 10

**Origine :** Udine

### 14. UNE ÉTRANGE MULTIPLICATION (Cat. 7, 8, 9, 10)

Dany a reçu de sa cousine une drôle de devinette !

Il s'agit de reconstruire la multiplication « mystérieuse » de cette figure en sachant que les seuls chiffres qu'il peut écrire dans les cases sont 2, 3, 5 et 7.

Dany trouve cette devinette trop difficile, mais sa cousine l'encourage et lui dit qu'il n'y a qu'une manière de disposer les chiffres.

$$\begin{array}{r}
 \square \square \square \times \\
 \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \\
 \square \square \square \square \\
 \hline
 \square \square \square \square \square
 \end{array}$$

**Reconstruisez la multiplication.**

**Expliquez comment vous avez trouvé la solution.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Reconstituer une multiplication d'un facteur de trois chiffres par un facteur de deux chiffres selon une disposition en colonnes « vide », en sachant que seuls les chiffres 2, 3, 5 et 7 ont été utilisés.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faudra procéder par essais, en commençant par les chiffres des unités des deux facteurs.
- Vérifier d'abord que seuls cinq couples de chiffres des unités sont possibles (3 ; 5), (5 ; 3), (5 ; 5), (5 ; 7), (7 ; 5). Les autres couples conduisent en effet à un chiffre des unités dans le premier produit qui n'est pas sur la liste autorisée, comme :  $7 \times 3 = 21$  donnerait 1 au chiffre des unités.
- Choisir un couple (3 ; 5) par exemple, et continuer par la recherche du chiffre des dizaines du premier facteur. Dans cet exemple, il y a une retenue de 1 et le produit de 5 par chacun des autres chiffres autorisés, plus la retenue de 1, donne 6 ou 1 et ne convient donc pas ! (fig. 1)
- Essayer ensuite (5 ; 3). Le chiffre des dizaines du premier facteur ne peut être que 7 selon le raisonnement précédent et qui conduit à 2 comme chiffre des dizaines du premier produit partiel. (fig. 2)  
Le chiffre des centaines du premier facteur est aussi 7, ce qui donne 2 et 3 pour les deux premiers chiffres du premier produit partiel. (fig. 3).
- Pour les mêmes raisons, le chiffre des dizaines du deuxième facteur ne peut être que 3. (fig. 4)
- Vérifier enfin que le résultat ne contient que les chiffres 2 ; 3 ; 5 ou 7, ce qui donne la solution. (fig. 5)

$\dots \dots 3$	$\dots 7 5$	$7 7 5$	$7 7 5$	$7 7 5$
$\times \dots \dots 5$	$\times \dots \dots 3$	$\times \dots \dots 3$	$\times \dots 3 3$	$\times \dots 3 3$
$\dots \dots 1/6 5$	$\dots \dots 2 5$	$2 3 2 5$	$2 3 2 5$	$2 3 2 5$
$\dots \dots \dots 5$	$\dots \dots \dots 5$	$\dots \dots \dots 5$	$2 3 2 5$	$2 3 2 5$
$\dots \dots \dots 5$	$\dots \dots \dots 5$	$\dots \dots \dots 5$	$2 3 2 5$	$2 5 5 7 5$

fig. 1

fig. 2

fig. 3

fig. 4

fig. 5

Comme l'énoncé dit qu'il n'y a qu'une solution, il n'est plus nécessaire de vérifier les couples (5 ; 7), (7 ; 5) et (5 ; 5) de la liste initiale. Mais si on essaye l'un de ces trois couples avant (5 ; 3), on aboutit dans chaque cas à une impasse : rapidement avec (7 ; 5) en raison du reste de 3 qui ferait apparaître un 8 dans les dizaines du premier produit partiel, un peu plus loin pour le cas du couple (5 ; 7) ; lors de l'addition finale pour le couple (5 ; 5) car les produits partiels peuvent être  $5 \times 555 = 2775$  mais le produit final contient deux chiffres non autorisés :  $55 \times 555 = 30525$ .

##### Attribution des points

- 4 Réponse correcte (775 × 33) avec explication de la démarche (étapes intermédiaires, impasses ...)
- 3 Réponse correcte avec explication partielle ou confuse
- 2 Réponse correcte sans aucune explication
- 1 Début de recherche correct, avec au moins un couple possible pour les unités
- 0 Incompréhension du problème

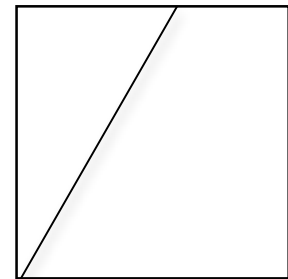
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : 14.F.15

**15. UN QUATRIÈME SEGMENT, ET BEAUCOUP DE TRIANGLES** (Cat. 8, 9, 10)

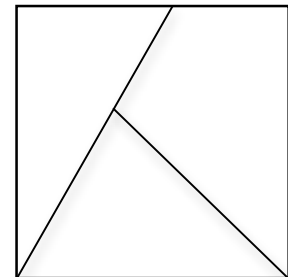
On a tracé 1 segment dans le carré de droite, ce qui le divise en 2 régions, dont l’une est un triangle.

**figure de départ :**



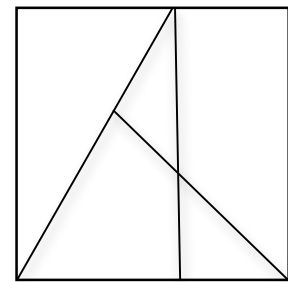
Jean a ajouté un deuxième segment à la figure de départ, suivant une diagonale du carré. Sa figure est composée de 3 régions, dont 2 sont des triangles.

**figure de Jean :**

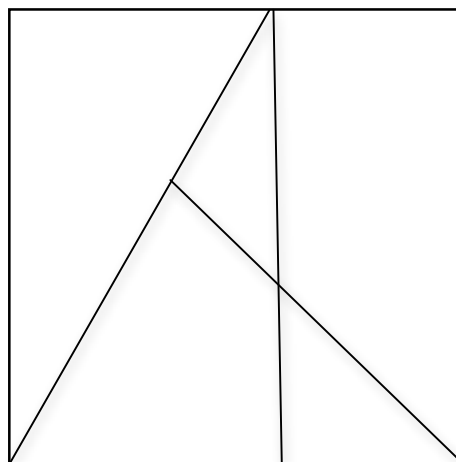


Anne a ajouté un troisième segment, vertical, à la figure de Jean. Le carré est partagé en 5 régions. On peut y distinguer en tout 5 triangles, dont certains sont composés de deux régions.

**figure d’Anne :**



Ajoutez un quatrième segment dans la figure d’Anne afin de pouvoir y distinguer le plus grand nombre possible de triangles.



**Combien de triangles au maximum avez-vous pu former ?  
 Désignez clairement ces triangles.**

**ANALYSE A PRIORI**

**Tâche mathématique**

Chercher le plus grand nombre de triangles qu’il est possible de faire apparaître sur une figure en ne traçant qu’un seul segment de plus et trouver une méthode pour les désigner.

**Analyse de la tâche**

- Identifiez les triangles des trois premières figures pour comprendre que certains triangles se recouvrent partiellement. La détermination des triangles est élémentaire pour les deux premières figures. Elle est plus délicate pour les 5 triangles de la figure d'Anne : 3 « élémentaires » et 2 composés de 2 régions.
- Trouver quelques principes d'action permettant d'optimiser le nombre de triangles pour le 4<sup>e</sup> segment : couper tous les autres, placer son extrémité sur des intersections déjà existantes ...
- Trouver une méthode fiable pour dénombrer et désigner les triangles.
- L'usage de couleurs ou de lettres est très difficile à gérer vu le nombre de triangles partiellement superposés. Une des méthodes les plus efficaces, qui exige cependant une très grande rigueur, est de désigner les régions du partage et de dresser l'inventaire des triangles formés d'une région, de deux régions, de trois régions, etc.
- Il est aussi envisageable de nommer les points d'intersection des segments de la figure par des lettres et de désigner les triangles par leurs trois sommets.
- On donne ici un exemple par désignation des régions de la figure d'Anne et trois exemples avec des dispositions différentes du quatrième segment :

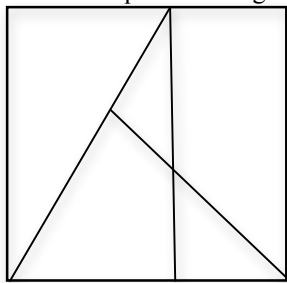
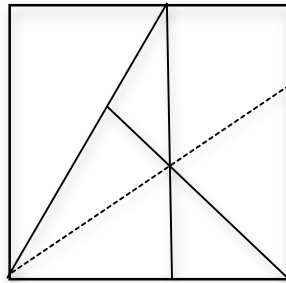
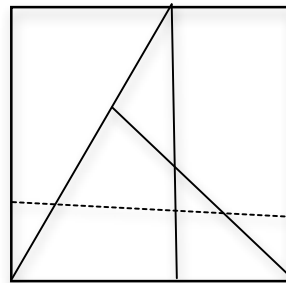


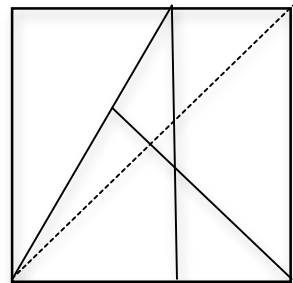
figure d'Anne



exemple 1



exemple 2



exemple 3

Exemple 1 : le segment partage les régions b et e en  $b'$ ,  $b''$ ,  $e'$ ,  $e''$ . On y distingue **11 triangles**, dont 6 élémentaires : a,  $b'$ ,  $b''$ , c, d,  $e''$  ; 2 composés de deux régions :  $ab''$ ,  $b'd$  et 3 composés de trois régions :  $ab''b'$ ,  $ab''e''$ ,  $b''b'd$ .

Exemple 2 : le segment partage les régions a, b et c. On y distingue **10 triangles**, dont 4 élémentaires :  $a'$ ,  $c''$ , d,  $e''$  ; 4 composés de deux régions :  $a'a''$  (a),  $a'b'$ ,  $c'c''$  (c),  $b'd$  ; 1 composé de trois régions :  $b''b'd$  ; 1 composé de quatre régions :  $a'a''b'b''$ .

Exemple 3 : le segment, diagonale du carré, partage les régions b, d et e. On y distingue **15 triangles**, dont 5 élémentaires : a,  $b'$ , c,  $d''$ ,  $e'$  ; 5 composés de deux régions :  $ab''$ ,  $b''d''$ ,  $b'd'$ ,  $d'd''$ ,  $d''e''$  ; 2 composés de trois régions :  $ab''b'$ ,  $b'd'e'$  ; 3 composés de quatre régions :  $ab''d''e''$ ,  $b'cd'e'$ ,  $b''b'd''d'$ .

Il existe d'autres dispositions du 4<sup>e</sup> segment faisant apparaître de 6 à 14 triangles.

**Attribution des points**

- 4 Réponse maximale : 15 triangles, avec dessin du segment et désignation claire des 15 triangles
- 3 Réponse : 13 ou 14 triangles avec dessin du segment et désignation claire des triangles annoncés, sans « erreur » ou réponse maximale : 15 triangles, avec dessin du segment ou désignation confuse ou absente des 15 triangles ou le segment tracé correspondant à 15 triangles, mais seulement 13 ou 14 triangles annoncés avec désignation claire
- 2 Réponse : 10 à 12 triangles avec dessin du segment et désignation claire des triangles, sans « erreurs »
- 1 Réponse : 7 à 9 triangles avec dessin du segment et désignation claire des triangles annoncés
- 0 Incompréhension du problème ou moins de 7 triangles

Niveau : 8, 9, 10

Origine : Bourg-en-Bresse

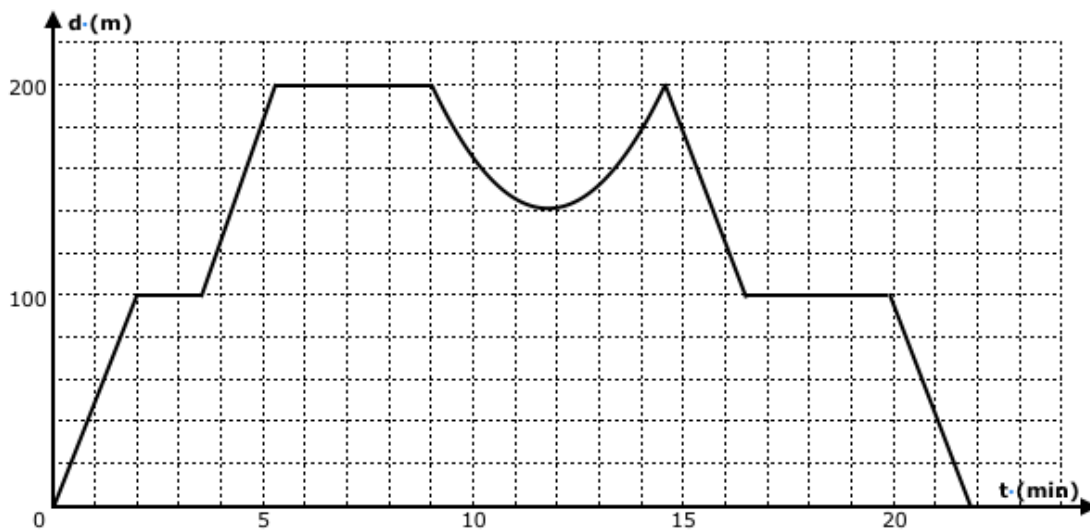
**16. DÉPLACEMENTS** (Cat. 9,10)

Le Comte de Transalpie rentre de sa promenade dans le parc de son château.

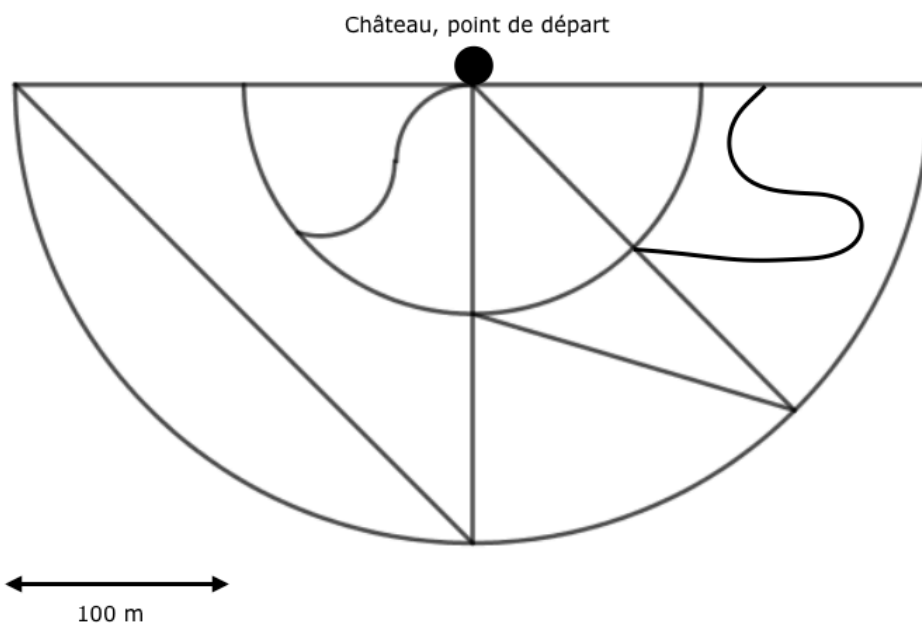
Il rencontre deux amis et leur montre l'écran de son téléphone portable et leur dit :

« Voici la représentation graphique de mon déplacement qui donne à chaque instant la distance à vol d'oiseau entre ma position et mon point de départ, en fonction du temps écoulé depuis mon départ. Je précise que j'ai enclenché mon appareil au début de ma promenade, que j'ai toujours marché du même pas, sans jamais m'arrêter, sans passer deux fois par le même chemin et en suivant toujours les sentiers du parc. »

*Graphique : distance (d) à vol d'oiseau entre le point de départ et le promeneur en fonction du temps (t)*



*Plan des sentiers du parc du château*



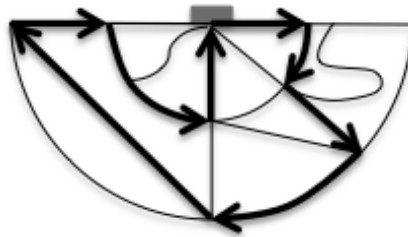
**Dessinez, sur le plan des sentiers du parc, le chemin qu'a parcouru le Comte de Transalpie au cours de sa promenade et expliquez comment vous avez trouvé ses différentes parties.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Dessiner sur un plan un itinéraire qui est décrit par un diagramme de déplacement « distance d'un point en fonction du temps »

**Analyse de la tâche**

- Imaginer comment varie la distance du point de départ au point où se trouve le promeneur selon le chemin qu'il suit et en fonction de la durée du parcours et les associer aux axes vertical (distance) et horizontal (écoulement du temps) du graphique.
- Comprendre qu'un segment horizontal signifie que le temps s'écoule alors que la distance reste constante, et le traduire dans les déplacements : soit le sujet est immobile, soit son parcours se situe sur un arc de cercle, dont le centre est le point de départ. Comprendre qu'un segment non horizontal signifie un éloignement ou un rapprochement vitesse constante le long d'une droite passant par le point de départ. L'inclinaison (angle formé par le segment et l'axe horizontal) dépend de la vitesse du sujet.
- Noter que le point de départ ne peut être que le château.
- Parmi les quatre segments qui s'éloignent du château, choisir celui qui est suivi d'un arc de cercle environ de la même longueur (même durée) et qui permet d'accéder à un nouveau segment de même pente que le premier (vitesse constante) s'éloignant toujours du château pendant la même durée que le premier, qui permet lui-même d'accéder à un arc de cercle pour une durée à peu près double de celle du premier. Vérifier alors si on se situe bien au début d'un trajet qui se rapprochera puis s'éloignera du château, c'est-à-dire le sentier rectiligne reliant le bas du plan à sa droite. (Si on suit l'arc de cercle, la partie correspondante du graphique serait un segment horizontal.)
- Dessiner le seul chemin possible : Partir du château, vers la gauche du plan, emprunter le premier demi-cercle sur 45 degrés, tourner à droite et prendre le segment qui s'éloigne du château jusqu'au deuxième demi-cercle, tourner à gauche et emprunter le deuxième demi-cercle sur 45 degrés, prendre le sentier rectiligne qui mène à l'extrême gauche du plan, tourner à droite et se rapprocher du château jusqu'au premier demi-cercle, tourner à droite et suivre ce demi-cercle sur 90 degrés, tourner à gauche et rejoindre le château.

**Critères d'attribution des points**

- 4 Parcours entièrement correct avec explications (récit des choix qui se présentent ou vérification)
- 3 Parcours entièrement correct sans explications
- 2 Une erreur de parcours et l'erreur complémentaire permettant d'arriver au château (l'arc de cercle plutôt que le chemin rectiligne par exemple)
- 1 Début du parcours (point de départ, un segment et un arc de cercle)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Milano

**17. BALLON** (Cat. 9, 10)

Un ballon rempli d'hélium est attaché au sol par une ficelle qui reste toujours tendue. Le vent se lève. Le ballon se déplace alors horizontalement de 2 m (par rapport au point d'attache au sol), et il descend verticalement de 0,5 m (par rapport à sa position sans vent).



**Quelle est la longueur de la ficelle ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

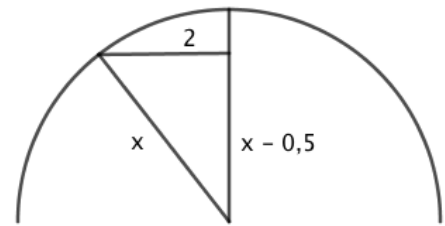
**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Modéliser une situation d'application du théorème de Pythagore où deux côtés du triangle sont donnés.

**Analyse de la tâche**

- Modéliser la situation décrite avec un dessin et réaliser que la distance entre le ballon et le point d'attache, qui coïncide avec la longueur de la ficelle, reste constante dans les deux positions avec ou sans vent.
  - Reconnaître un triangle rectangle qui permet d'appliquer le théorème de Pythagore.
  - Exprimer la longueur d'un côté en fonction de la longueur de l'hypoténuse.
  - Appliquer le théorème de Pythagore qui donnera l'égalité :  

$$x^2 = 2^2 + (x - 0,5)^2$$
  - Résoudre l'équation obtenue (en appliquant correctement le produit remarquable) pour trouver  $x = 4,25$ .
- Ou, après avoir modélisé la situation, faire des essais organisés pour résoudre l'équation  $x^2 = 2^2 + (x - 0,5)^2$

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (4,25 m) avec des explications claires et complètes et un schéma
- 3 Réponse correcte (4,25 m) avec des explications partielles ou peu claires ou simplement une vérification
- 2 Recherche faisant apparaître l'équation suivante  $x^2 = 2^2 + (x - 0,5)^2$   
Ou Réponse cohérente avec un mesurage sur un dessin à l'échelle représentant correctement la situation
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple : 1 essai correct, mise en équation avec deux inconnues, un schéma ou un dessin représentant correctement la situation ...)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Luxembourg

**18. MARC ET LUC EN VOYAGE** (Cat. 9, 10)

Marc et Luc partent de l'aéroport de Venise le même jour, mais pour des destinations différentes. La destination de Marc est New York aux Etats-Unis et celle de Luc est New Dehli en Inde.

L'avion de Marc part à 13 :15 (quand il est 7 :15 du matin à New York) et le temps pour arriver à destination est d'environ 18 heures.

L'avion de Luc part à 12 :45 (quand il est 20 :45 à New Delhi) et le temps de voyage est d'environ 15 heures.

Les deux amis se séparent à 11h30. Ils décident de s'appeler par téléphone aussitôt que possible, sachant qu'ils ne pourront pas se contacter durant le voyage et qu'ils ne se téléphoneront pas entre 23h et 7h à l'heure locale des pays où ils arriveront, qui sont dans des fuseaux horaires différents.

**Après combien d'heures à partir du moment où ils se sont séparés les deux amis pourront-ils se contacter par téléphone ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer la concordance de rencontres, départs et arrivées de deux personnages selon trois fuseaux horaires et trouver le moment où ils pourront avoir une conversation téléphonique après leur arrivée, entre 07 :00 et 23 :00 heure locale.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que les fuseaux horaires se réfèrent à celui de Venise : l'heure de New York est en retard et celle de Delhi en avance
- Organiser les événements selon les trois fuseaux horaires à partir des sept informations données (en gras dans le tableau. De la ligne Venise à celle de New York, on soustrait 6 ; de la ligne Venise à celle de New Dehli on ajoute 8

Événement	salut.	départ Marc		arr. Marc	départ Luc		arr. Luc	tél :
heure de Venise	<b>11.30</b>	<b>13.15</b>	<b>+18</b>	07.15	<b>12.45</b>	<b>+15</b>	03.45	13.00
heure de New York	05.30	<b>07.15</b>	+ 18	01.15	06.45	+15	21.45	07.00
heure de New Dehli	19.30	21.15	+18	15.15	<b>20.45</b>	+ 15	11.45	21.00

- Comprendre qu'au moment de l'arrivée à destination les deux amis ne peuvent pas se téléphoner parce que Marc arrive à 1:15 de nuit et qu'il faut attendre 7h du matin lorsqu'il se réveillera. 7 h de NY correspondent à 13h de Venise et à 21 h de ND, et on constate que personne ne dort à ce moment.
- Déterminer la durée entre la séparation à Venise et la communication téléphonique selon l'heure de NY par exemple. Les deux amis se séparent à 5 :30 (= 11 :30 – 6) le jour du départ ils se téléphonent à 7 :00 le lendemain, donc après 24 heures (5.30) plus 1 :30 (7- 5 :30), donc, 25 heures et 30 minutes.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (25 heures et 30 minutes) avec explications claires et complètes
- 3 Réponse correcte (25 heures et 30 minutes) mais avec explications partielles ou peu claires ou réponse erronée due à une erreur de calcul avec explications claires
- 2 Réponse correcte sans explications
- 1 Début de recherche cohérente (par exemple : calcul correct de la différence d'horaire entre New York, Venise et Nouvelle Delhi)
- 0 Incompréhension du problème

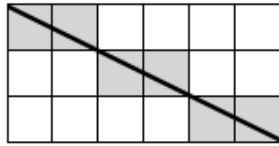
**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Belluno

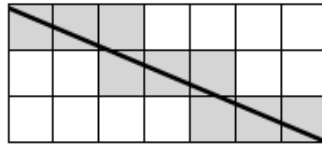
**19. CARRÉS ET DIAGONALES** (Cat. 9, 10)

Dans les trois rectangles quadrillés reproduits ci-dessous, une diagonale est tracée et les carreaux qu'elle traverse sont grisés.

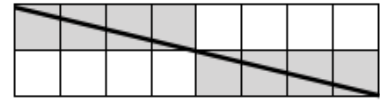
6 carreaux grisés dans un rectangle 3 × 6



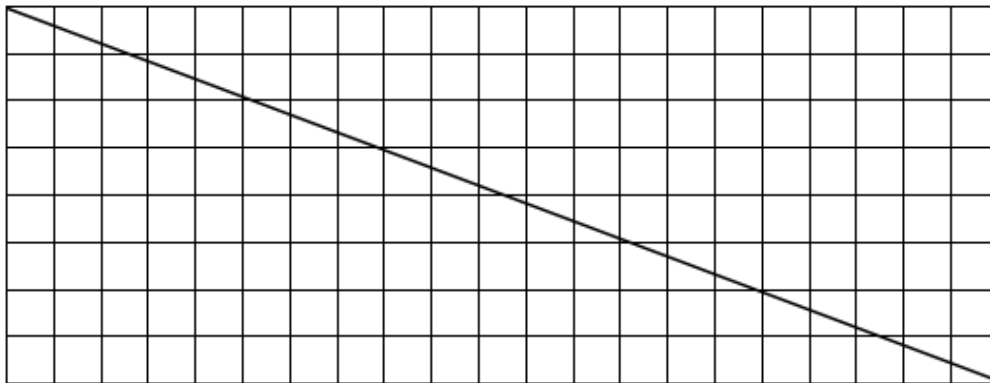
9 carreaux grisés dans un rectangle 3 × 7



8 carreaux grisés dans un rectangle 2 × 8



**Combien y a-t-il de carreaux traversés par la diagonale du rectangle dessiné ci-dessous ? Les griser.**



**Combien y a-t-il de carreaux traversés par une diagonale dans un rectangle de 21 x 9 carreaux ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé ces nombres.**

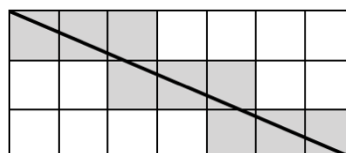
**ANALYSE A PRIORI**

**Tâche mathématique**

Déterminer le nombre de carreaux traversés par la diagonale d'un rectangle dessiné sur un quadrillage.

**Analyse de la tâche**

- Observer les trois exemples et constater que, lorsque la diagonale passe par un nœud du quadrillage, deux carreaux de part et d'autre de ce nœud ne sont pas « traversés » et par conséquent restent blancs (figures de gauche et de droite), alors que si la diagonale traverse une ligne du quadrillage ailleurs que sur un nœud elle entre dans un nouveau carreau qui devra être grisé.
- Commencer à griser les carreaux du rectangle donné et s'apercevoir qu'il faut déterminer si les nœud (2 ; 5), (3 ; 8), (5 ; 13) et (6 ; 16) sont ou non sur la diagonale.
- Établir que ces 4 nœud ne sont pas sur la diagonale en faisant un dessin plus grand et plus précis ou en observant que les rapports  $8/21 \cong 0,381$  (dimensions du rectangle),  $2/5 = 0,4$  et  $3/8 = 0,375$  sont tous différents (en se référant à une similitude de rectangles, à la linéarité, à la proportionnalité, à la pente ...)
- Compter les carreaux un à un (chaque fois qu'une ligne du quadrillage est traversée, on entre dans un nouveau carreau) : il y en a 28. Dans le cas erroné où l'on considère que la droite passe par deux ou quatre nœud, le comptage des carreaux donne respectivement 26 ou 24 (on signale que dans un rectangle dont les dimensions sont deux entiers naturels  $a$  et  $b$  premiers entre eux, le nombre de carreaux traversés par la diagonale est égal à  $a + b - 1$ , ce qui dans ce problème donne  $8 + 21 - 1 = 28$ ).
- Pour la seconde question, constater que les nombres 21 et 9 ont 3 comme plus grand diviseur commun, que la diagonale passera par les nœuds (3 ; 7) et (6 ; 14)



et que le problème se ramène à celui de la diagonale qui traverse un rectangle de  $3 \times 7$  carreaux identiques à celui ci, trois fois de suite. Dans ce cas là il y a 9 carreaux traversés par la diagonale sur chacun de ces rectangles, soit en tout :  $3 \times 9 = 27$  carreaux.

**Attribution des points**

- 4 Les deux réponses correctes (28 et 27 carreaux traversés), avec des explications claires et complètes du même type que celles proposées dans l'analyse
- 3 Les deux réponses correctes mais sans avoir grisé les carrés pour la première et/ou avec des explications incomplètes ou peu claires pour la seconde
- 2 Les deux réponses 28 et 27 sans aucune explication  
Ou une réponse correcte pour le premier rectangle et une réponse erronée pour le second,  
Ou une réponse erronée pour le premier rectangle et une réponse correcte pour le second, avec des explications claires
- 1 Réponses 24 ou 26 pour le premier rectangle et/ou 29 pour le second,.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 9, 10**Origine :** reprise de 07.I.20