	Titre	Catégories	Thème	Origine
1.	Les hirondelles	3	opérations, addition (N)	UD
2.	L'escalier de la Tour Rouge	3 4	suites de nombres et période	SI
3.	Les chats	3 4	géométrie, pavage	GE
4.	Le ruban des nombres	3 4 5	numération	RZ
5.	Les cadres	3 4 5	géométrie, relation d'ordre	GE
6.	Hirondelles et colombes	4 5	opérations, addition (N)	UD
7.	Les bagues	4 5 6	combinatoire	SI
8.	Le ruban	5 6	mesures, partage	CB
9.	La décoration de Charles	5 6 7	géométrie et suite périodique	SI
10.	Extra-terrestres	5 6 7 8	déduction logique	SI
11.	La lecture d'Isidore	6 7 8	succession de fractions	BB
12.	Yvan le confiseur	6 7 8 9 10	empilement optimal de parall.rect.	G3D
13.	Grille de nombres	6 7 8 9 10	table de multiplication	fj
14.	Le parquet	7 8 9 10	géométrie et mesures	SI
15.	Noël gourmand	7 8 9 10	proportionnalité	CB
16.	Toujours plus grands	8 9 10	géométrie et suite périodique	SI
17.	A la plage	9 10	mesures, géométrie 3D	PR
18.	Etrange découpage	9 10	géométrie, démonstration	fj

1. LES HIRONDELLES (Cat 3)

Quand Laurent se réveille il voit que des hirondelles sont posées sur un fil électrique devant sa maison.

Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 17 hirondelles s'envolent.

Un peu plus tard, 12 hirondelles viennent rejoindre celles qui sont restées sur le fil.

Placé derrière sa fenêtre, Laurent compte les hirondelles qui sont maintenant posées sur le fil électrique. Il y en a 36.

Combien y avait-il d'hirondelles sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver l'état initial dans une situation où l'état final (36) résulte d'une diminution (-17) suivie d'une augmentation (+12).

Analyse de la tâche

- Reconnaître l'ordre chronologique et les variations entre les états successifs d'une grandeur. Etat initial : ouverture de la fenêtre avec un nombre inconnu d'hirondelles - départ de 17 hirondelles (première variation) et état intermédiaire plus petit que l'état initial - arrivée de 12 hirondelles (deuxième variation) et état final, de 36, plus grand que l'état intermédiaire. Identifier l'inconnue : l'état initial.
- Traduire les variations par les opérations adaptées et effectuer les calculs correspondants ou opérer sur des dessins ou des objets en recourant au comptage :

  soit dans l'ordre chronologique, par essais successifs avec une hypothèse de départ (par exemple 20 – 17 + 12 = 15, « trop petit », ... pour aboutir à 41 – 17 + 12 = 36),

  soit en remontant dans le temps à partir de 36 en étant bien conscient qu'il s'agit d'utiliser les opérations réciproques des précédentes : 36 – 12 + 17 = 41.

  On peut aussi faire le bilan des deux variations : « diminution de 5 (17 – 12) par rapport à l'état initial ».

Attribution des points

4 Réponse correcte (41 hirondelles) avec une explication claire de la procédure suivie (par exemple, la séquence de calculs, schémas, dessins du genre bande dessinée ...)

3 Réponse correcte (41 hirondelles) avec explications peu claires ou incomplètes (par exemple un des passages d'un état à un autre non décrit dans la succession)

ou tentatives menées correctement et bien expliquées, mais avec une seule erreur de calcul

2 Réponse correcte sans explications

1 Début de recherche cohérente : une ou deux tentatives infructueuses ou début de raisonnement correct (par exemple calcul de 24 = 36 – 12 comme état intermédiaire)

ou réponse 31 avec bilan des deux variations 5, mais 36 – 5 au lieu de 36 + 5)

0 Incompréhension du problème

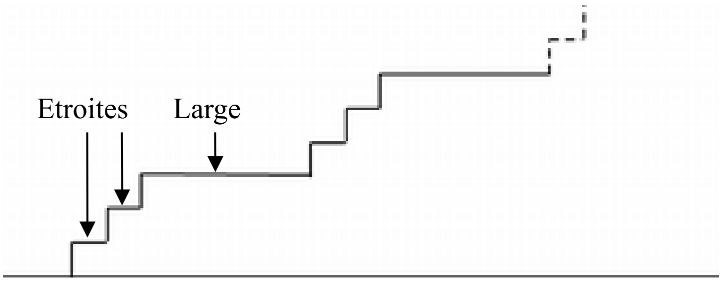
Niveau : 3

Origine : Udine

2. L'ESCALIER DE LA TOUR ROUGE (Cat. 3, 4)

Mathieu monte l'escalier qui conduit en haut de la Tour Rouge. Cet escalier commence par deux marches étroites, puis une large, puis deux étroites, puis une large, et ainsi de suite, très régulièrement. L'escalier se termine par une marche large.

Voici un dessin du début de l'escalier.



Une fois arrivé en haut de l'escalier, Mathieu annonce qu'il a compté 60 marches étroites dans l'escalier.

Combien l'escalier a-t-il de marches au total ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver le nombre de termes d'une suite régulière périodique, dont la période, est de trois termes (« étroite, étroite, longue ») et se répète 30 fois.

Analyse de la tâche

- Décrypter le dessin : comprendre ce que l'on dénomme « marche », que les marches se répètent par groupes de trois : deux étroites et une large, que l'escalier continue selon la même règle de construction.
- (Continuer éventuellement le dessin dans les limites de la feuille, ou sur une autre feuille).
- Pour éviter de représenter la suite entière, on peut s'en tenir à une première partie et procéder par répétitions (par exemple se limiter à 10 groupes de 3 marches : 20 étroites et 10 larges à compter trois fois : 60 étroites et 30 larges)

Ou, dans une démarche générique, comprendre qu'en montant 60 marches étroites, Mathieu a monté 30 groupes de deux marches étroites avec à chaque fois une marche large, c'est-à-dire sur 30 groupes de trois marches ou sur 90 marches au total : 60 marches étroites et 30 larges.

Ou inférer de quelques exemples que le nombre de marches larges est égal à la moitié du nombre de marches étroites (soit 30) et en déduire le nombre total de marches (60 + 30 = 90).

Attribution des points

4 Réponse correcte (90 marches) avec une explication qui peut se limiter à une ou deux opérations bien décrites du genre 60 : 2 = 30 ou 60 + 30 ou 3 x 30, ou à un texte clair, ou à un dessin complet ou un fragment répété pour arriver à 90 marches …

3 Réponse correcte avec explications confuses

2 Réponse correcte, sans explications
ou réponse 89 due au fait que le point d'arrivée n'est pas considéré comme la dernière marche
ou dessin ou suite de signes correct mais erreur de dénombrement ou de calcul

1 Début de recherche cohérente, par exemple avec la perception des 30 groupes de trois marches (2 étroites et 1 large) aboutissant à 60 ou 120

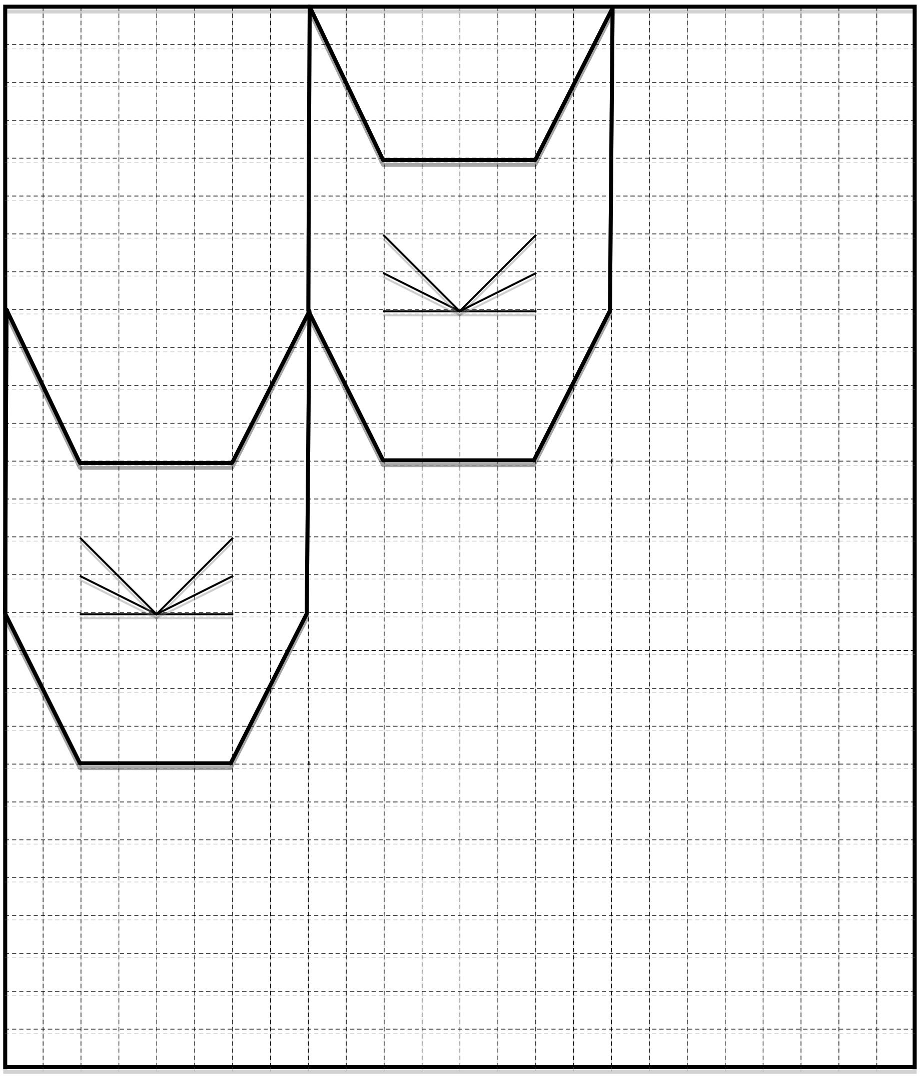
0 Incompréhension du problème

Niveaux: 3, 4

Origine: Siena

3. LES CHATS (Cat. 3, 4)

Hélène a déjà dessiné deux têtes de chats dans cette grille :



Hélène veut encore dessiner dans la grille le plus grand nombre possible d'autres têtes de chats, toutes identiques aux deux premières.

Lorsque la grille est pleine, Hélène colorie seulement les têtes complètes : certaines têtes en rouge, les autres en bleu.

Deux têtes qui se touchent par un ou plusieurs côtés ne doivent pas être de la même couleur.

Comme Hélène, dessinez, vous aussi, sur cette grille le plus grand nombre possible de têtes entières de chats et coloriez-les.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

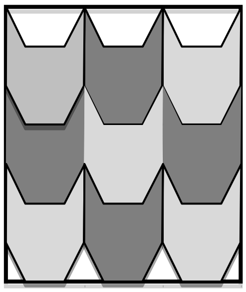
Paver une grille avec le plus grand nombre possible de figures égales à deux figures données et les colorier de deux couleurs, de manière que deux figures ayant un côté commun soient de couleurs différentes.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il s'agit de recouvrir la grille avec le plus grand nombre possible de têtes entières identiques aux deux premières.
- Pour paver la grille, les élèves peuvent compléter les têtes :

de la première ligne en haut, la première colonne à gauche ou la colonne centrale et constater qu'ils peuvent y placer dans chaque cas 3 têtes exactement et obtenir 9 têtes en tout.

- Colorier en rouge et en bleu, de manière que deux têtes ayant un côté commun soient de couleurs différentes.



Attribution des points

4 Dessin clair et précis (y compris les moustaches) des 9 têtes coloriées correctement

3 Les 9 têtes sont dessinées précisément avec une erreur de coloriage (deux têtes de même couleur avec un côté commun ou parties de têtes (non entières) coloriées

2 Les 9 têtes sont dessinées mais avec des imprécisions sur les moustaches,
ou les 9 têtes sont dessinées avec un coloriage incomplet ou absent

1 Dessin incorrect dû par exemple à une disposition différente des têtes de la colonne de droite
ou, les 9 têtes sont dessinées mais avec des imprécisions dans les moustaches et dans le coloriage

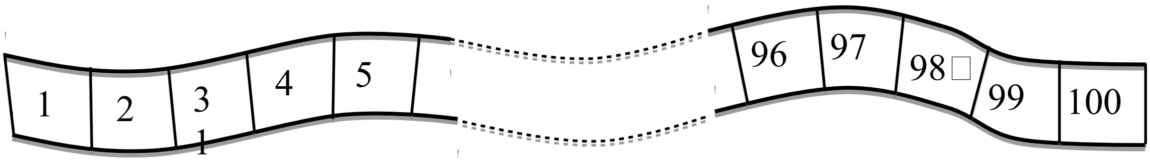
0 Incompréhension du problème ou des têtes de formes ou de dimensions différentes de celles qui sont données

Niveaux: 3, 4

Origine: Genova

4. LE RUBAN DES NOMBRES (Cat. 3, 4, 5)

Luc et Richard ont trouvé un ruban des nombres de 1 à 100 :



Luc décide de colorier en rouge toutes les cases du ruban dont les nombres s'écrivent seulement avec les chiffres 0, 2, 4, 6, 8.

Richard décide de colorier en bleu toutes les cases du ruban dont les nombres s'écrivent seulement avec les chiffres 1, 3, 5, 7, 9.

Combien de cases Luc va-t-il colorier en rouge ?

Combien de cases Richard va-t-il colorier en bleu ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dénombrer parmi les nombres de 1 à 100 ceux qui s'écrivent seulement avec des chiffres « pairs » ou seulement avec des chiffres « impairs ».

Analyse de la tâche

- Considérer l'ensemble des nombres 1, 2, 3, ... , 97, 98, 99, 100, se rendre compte qu'il y en a bien 100, qu'ils sont tous écrits avec un, deux ou trois des dix chiffres 0, 1, 2, … 9, et qu'il faut distinguer les chiffres des nombres.
- Observer qu'il y a des nombres composés de un ou deux chiffres « pairs » ou de un ou deux chiffres « impairs» ou encore de chiffres « pair » et « impair » et un nombre composé de trois chiffres.
- Procéder au dénombrement pour répondre à la question posée, soit :

  - par l'écriture et/ou coloriage des cases des100 nombres (ou cases) et comptage un à un de chaque nombre de Luc et de Richard,

  - ou en n'écrivant que les nombres (ou cases) cherchés, regroupés ou non par dizaines, …

  et trouver que Luc a colorié en rouge les 24 nombres (2 ; 4 ; 6 ; 8 ; 20 ; 22 ; 24 ; 26 ; … 80 ; 82 ; 84 ; 88) et Richard a colorié en bleu les 30 nombres (1 ; 3 ; 5 ; 7 ; 9 ; 11 ; … 91 ; 93 ; 95 ; 97 ; 99).
- En regroupant les nombres par dizaines on peut ramener le dénombrement un à un à des multiplications :

  4 × 5 et 5 × 5 auxquels il faut ajouter les nombres d'un seul chiffre: 4 pour Luc et 5 pour Richard.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète : Luc 24 nombres (ou cases, en rouge) et Richard 30 nombres (ou cases, en bleu), en indiquant la manière dont les nombres ont été trouvés (comptage, addition, multiplication) ou simplement en donnant l'inventaire complet

3 Réponse correcte et complète, avec explications ou inventaire incomplets

ou démarche correcte et inversion des réponses par inattention (Luc 30 et Richard 24)

ou inventaire complet mais sans formulation des quantités de nombres

2 Réponse correcte et complète, sans explications

ou une seule erreur de comptage et explications claires

1 Plus d'une erreur dans le comptage des nombres (ou cases) respectant la distinction entre les nombres ne comportant que des chiffres pairs et de l'autre des nombres ne comportant que des chiffres impairs

ou réponse (Luc 25 et Richard 20) qui ne prend en compte que les nombres de deux chiffres

ou réponse avec un ou deux (au maximum) nombres « mixtes » (un chiffre pair et un impair) pris par inattention

0 Réponse du genre « Ils ont le même nombre de jetons » ou « 50 et 50 » due à une confusion entre nombres pairs ou impairs et nombres formés de chiffres « pairs » ou « impairs »

ou incompréhension du problème

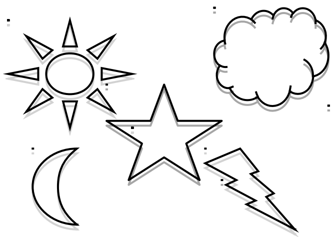
Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Rozzano

5. LES CADRES (Cat. 3, 4, 5)

Clara a accroché cinq cadres l'un à côté de l'autre sur le mur au-dessus de son lit.

Dans l'un il y a un soleil, dans un autre un nuage, dans un autre une lune, dans un autre un éclair et dans un autre encore, une étoile.

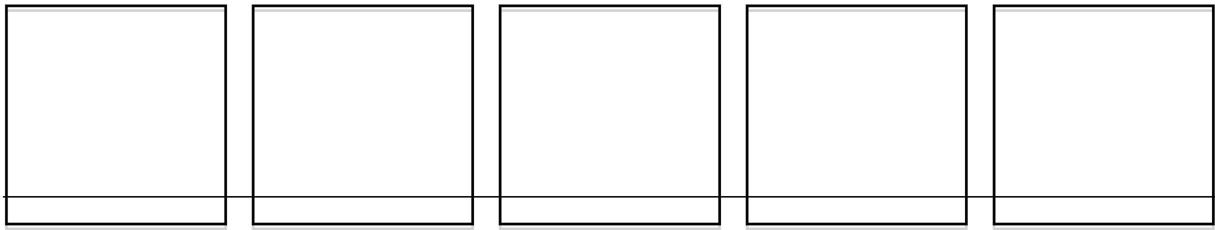


Lorsqu'elle regarde les cinq cadres, Clara voit que :

- la lune n'est pas à côté de l'étoile ni à côté du nuage ;
- il y a deux cadres entre celui du soleil et celui de l'étoile ;
- le nuage est à côté de l'étoile, à droite ;
- l'éclair est à côté de la lune.

Dessinez les images dans les cadres dans le bon ordre (ou écrivez le nom des images dans leur cadre).

Expliquez comment vous avez trouvé leur position.



ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer un alignement de cinq objets selon des informations de voisinage et de positions relatives.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les cinq figures données doivent être disposées dans les cinq cadres en respectant une liste de contraintes.
- Lire les contraintes et se rendre compte qu'aucune d'entre elles, seule, ne permet de trouver la position d'une figure et qu'il sera nécessaire de tenir compte de plusieurs d'entre elles simultanément.
- Organiser la recherche, par essais et vérifications ou par une hypothèse et éliminations successives

  Par exemple, à partir de la deuxième consigne, il y a quatre configurations possibles du soleil et de l'étoile:

  soleil, … , … , étoile, … - étoile, … , … soleil, … - …, soleil, …, … étoile - …, étoile, … , …, soleil.

  La troisième consigne selon laquelle le nuage est à droite de l'étoile réduit les configurations possibles à trois :

  soleil, … , … étoile, nuage - étoile, nuage , … , soleil, … , - …, étoile, nuage , …, soleil.

  La première consigne sur la position de la lune exclut une autre configuration, il n'en reste que deux :

  soleil, … , … , étoile, nuage - étoile, nuage , … soleil, …

  La quatrième consigne sur l'éclair et la lune conduit à l'unique possibilité :

  soleil, lune, éclair, étoile, nuage.

Attribution des points

4 La solution correcte (soleil, lune, éclair, étoile, nuage) avec une explication dans laquelle figurent au moins deux relations logiques du genre « l'étoile ne peut pas être à gauche parce que … », « puisqu'il y a deux cadres entre le soleil et l'étoile, ceux-ci ne peuvent pas être au milieu »,

ou en donnant l'ordre d'utilisation des indices

ou solution correcte avec mise en évidence de la vérification des consignes.

3 La solution correcte (soleil, lune, éclair, étoile, nuage) avec des explications qui se limitent à des commentaires généraux du genre « on a essayé beaucoup de possibilités », « on a suivi les consignes » …

2 La solution « symétrique » (nuage, étoile, éclair, lune, soleil) due à la confusion gauche/droite

ou dessin correct sans explications

1 Réponse avec une interversion de deux cadres

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5,

Origine: Genova & 3RMR

6. HIRONDELLES ET COLOMBES (Cat. 4, 5)

Quand Laurent se réveille, il voit que des hirondelles et des colombes sont posées sur un fil électrique devant sa maison.

Il ouvre la fenêtre de sa chambre, 11 hirondelles et 6 colombes s'envolent.

Un peu plus tard, 7 hirondelles et 11 colombes viennent rejoindre les oiseaux qui sont restés sur le fil.

Laurent compte les oiseaux qui sont maintenant posés sur le fil électrique. Il y a 23 hirondelles et 13 colombes.

Combien y avait-il d'oiseaux sur le fil avant que Laurent ouvre la fenêtre ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la somme de 2 nombres, chacun étant l'état initial dans une situation où l'état final résulte d'une diminution suivie d'une augmentation.

Analyse de la tâche

- Reconnaître l'ordre chronologique et les variations entre les états successifs de deux grandeurs. Etat initial : ouverture de la fenêtre avec un nombre inconnu d'hirondelles et de colombes - départ de 11 hirondelles et 6 colombes (première variation) et état intermédiaire plus petit que l'état initial - arrivée de 7 hirondelles et 11 colombes (deuxième variation) et état final, de 23 hirondelles et 13 colombes, plus grand que l'état intermédiaire. Identifier l'inconnue : l'état initial (nombre total d'hirondelles et de colombes).
- Comme c'est le nombre total d'oiseaux au départ qui est demandé, deux raisonnements sont possibles :

  le premier portant sur le nombre total d'oiseaux à chaque étape ;

  le deuxième sur le nombre de chaque catégorie d'oiseaux à chaque étape.
- Traduire les variations par les opérations adaptées et effectuer les calculs correspondants ou opérer sur des dessins ou des objets en recourant au comptage :

  soit dans l'ordre chronologique, par essais successifs avec une hypothèse de départ portant, soit sur le nombre total d'oiseaux (par exemple 20 – 17 + 18 = 21, « trop petit », ... pour aboutir à 35 – 17 + 18 = 36), soit d'une part sur le nombre d'hirondelles et d'autre part sur le nombre de colombes pour aboutir à 27 – 11 + 7 = 23 et 8 – 6 + 11 = 13 et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

  soit en remontant dans le temps à partir du nombre total d'hirondelles et de colombes 36 en étant bien conscient qu'il s'agit d'utiliser les opérations réciproques des précédentes : 36 – 18 + 17 = 35 ou séparément à partir du nombre d'hirondelles (23 – 7 + 11 = 27) et de colombes (13 – 11 + 6 = 8) et terminer en totalisant le nombre de colombes et d'hirondelles : 27 + 8 = 35

  on peut aussi faire le bilan des deux variations soit pour chaque catégorie d'oiseaux : « diminution de 4 (11 – 7) par rapport à l'état initial pour les hirondelles et augmentation de 5 (11 – 6) pour les colombes », soit pour l'ensemble des oiseaux : augmentation de 1 (18 – 17) par rapport à l'état initial.

Attribution des points

4 Réponse correcte (35 oiseaux) avec une explication claire de la procédure suivie (par exemple, la séquence de calculs, schémas, dessins genre bande dessinée ...)

3 Réponse correcte (35 oiseaux) avec explications peu claires ou incomplètes (par exemple un des passages d'un état à un autre non décrit dans la succession)

ou tentatives menées correctement, bien expliquées, mais avec une seule erreur de calcul

ou réponse 27 hirondelles et 8 colombes avec explications claires

2 Réponse correcte sans explications

ou réponse 27 hirondelles et 8 colombes sans explication

ou réponse correcte bien expliquée sur une catégorie d'oiseaux

1 Début de recherche cohérente : une ou deux tentatives infructueuses ou début de raisonnement correct (par exemple calcul de 23 – 7 = 16 hirondelles et 13 – 11 = 2 colombes comme état intermédiaire,

ou réponse 37 avec bilan des deux variations 1, mais 36 + 1 au lieu de 36 - 1)

0 Incompréhension du problème

Niveau : 4, 5

Origine: Udine

7. LES BAGUES (Cat. 4, 5, 6)

Line a reçu en cadeau trois bagues, une rouge, une verte et une jaune.
Elle décide de mettre chaque jour une bague à l'annulaire de sa main gauche et une autre à l'annulaire de sa main droite.
Elle décide aussi de faire chaque jour un choix différent.
Aujourd'hui, lundi, elle choisit la bague rouge pour la main gauche et la jaune pour la main droite.
Mardi elle fera un autre choix, mercredi encore un autre…

Mais un certain jour, Line s'aperçoit qu'elle ne peut plus faire un choix différent de ceux déjà faits.

Quel est ce jour ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Parmi trois objets dénombrer les dispositions ordonnées de deux d'entre eux, dans un contexte de trois bagues de couleurs différentes, une sur chaque main.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les différentes façons de porter les bagues dépendent soit de leur couleur soit de la main qui les porte.
- Se rappeler qu'à chaque choix de deux couleurs différentes pour les bagues correspondent deux façons différentes de les porter.
- Établir une stratégie qui permette de trouver systématiquement les dispositions pour ne pas perdre de solutions. Par exemple :

  VR (*vert main gauche rouge main droite*) ou bien RV (*rouge main gauche vert main droite*)

  VG ou GV

  GR ou RG ;

  et en déduire qu'il y a en tout 6 possibilités.
- Conclure que Line sera forcée de répéter une des combinaisons le dimanche.

Attribution des points

4 Réponse correcte (dimanche) avec une explication claire (liste des 6 différentes possibilités correspondant aux 6 jours du lundi au samedi)

3 Réponse correcte (dimanche) mais avec des explications peu claires ou incomplètes (par exemple, les possibilités ne sont pas détaillées)

2 Procédure correcte conduisant aux 6 choix possibles mais oubli de la réponse « dimanche »
ou réponse « samedi » avec les six choix découverts et une confusion entre « le 6^{e} jour » et « après 6 jours »
ou réponse « dimanche », sans aucune explication

1 Descriptions de trois à cinq choix différents avec ou sans mention du jour correspondant

0 Incompréhension du problème
ou seulement deux choix différents

Niveau: 4, 5, 6

Origine: Siena

8. LE RUBAN (Cat. 5, 6)

Anne-Lise coupe un ruban de 140 cm de longueur en quatre parties pour emballer des cadeaux.

- La première et la deuxième partie sont de même longueur,
- la troisième partie mesure 15 cm de plus que la deuxième,
- la quatrième partie mesure 10 cm de plus que la troisième.

Quelle est la longueur de chaque partie du ruban découpé ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Décomposer 140 en une somme de quatre termes dont deux sont égaux, un troisième vaut 15 de plus que les premiers et le quatrième 10 de plus que le troisième.

Analyse de la tâche

- Trier les informations de l'énoncé et retenir celles qui seront utiles pour répondre à la question : les relations entre les quatre parties et la longueur totale.
- Se rendre compte qu'il s'agit de compléter une addition dont seule la somme est connue (140), dont les quatre termes ne sont pas encore déterminés mais dont on connaît des relations entre certains d'entre eux.
- Imaginer les quatre nombres : deux égaux, l'un qui vaut 15 de plus et l'un qui vaut encore 10 de plus que le troisième ou 25 de plus que les deux premiers et chercher une manière de les déterminer. Par exemple :

  par essais, au hasard ou organisés ou en décomposant 140 en quatre nombres égaux et les compléments de 15 et 25 (ou 15 et 15 + 10 ou 40), pour déduire, par soustraction, que la somme des quatre nombres égaux est 100 puis, par division, que chacun d'eux est 25 ; puis calculer les autres nombres, (25, 25, 40 et 50), vérifier que leur somme est 140 et rédiger les explications, ou encore par une représentation graphique de quatre segments égaux et de leurs compléments de 15 et 25. Etc.
- Déterminer ainsi les quatre longueurs: 25, 25, 40 et 50, en cm.

Attribution des points

4 Réponse correcte et complète (25 cm, 25 cm, 40 cm, 50 cm) avec explications précises et complètes mentionnant explicitement toutes les données

3 Réponse correcte et complète mais avec explications peu claires ou insuffisamment explicites, ou seulement une vérification

2 Réponse correcte sans explications
ou une seule erreur de calcul, avec explications et procédure cohérente

1 Début de recherche mais compréhension erronée des conditions (par exemple attribution de 15 de plus à la troisième partie et 10 de plus que les premières pour la quatrième, ce qui conduirait à 28,75 ; 28,75 ; 43,75 ; 38,75)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine: Campobasso

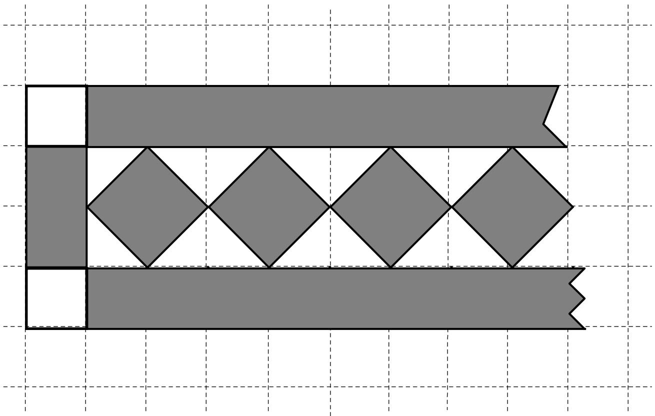
9. LA DÉCORATION DE CHARLES (Cat. 5, 6, 7)

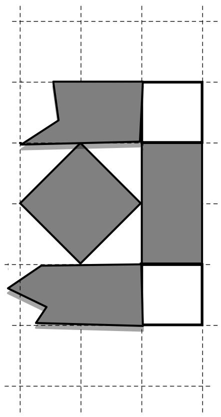
Charles peint une décoration sur une feuille de papier quadrillé.

Il commence par une bande verticale faite de deux carreaux laissés en blanc qui encadrent un rectangle de deux carreaux gris.

Il continue avec un motif qui est toujours le même : deux bandes horizontales grises qui bordent une file de carrés gris, alignés par leurs sommets. Les espaces entre les parties grises sont laissés en blanc.

Voici le début de la décoration, à gauche : et voici la fin, à droite :





La décoration se termine, à droite, par une bande verticale de quatre carreaux, identique à la bande, de gauche.

Sur la décoration entière, l'aire de la partie laissée en blanc est de 68 carreaux du quadrillage.

Quelle est l'aire de la partie de la décoration que Charles a coloriée en gris. (Prenez comme unité d'aire un carreau du quadrillage.)

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer l'aire de la partie grise d'u dessin d'une frise sur papier quadrillé, à partir d'une partie du dessin et de la donnée de l'aire totale de la partie blanche.

Analyse de la tâche

- Observer le dessin et éventuellement le poursuivre pour comprendre les règles de construction.
- Se rendre compte qu'on peut calculer facilement les aires blanches et grises des deux colonnes de gauche et de droite, que l'aire des carrés gris et celle des différents triangles blancs se déterminent par le découpage des unités du quadrillage, mais que la longueur des bandes horizontales ou le nombre des carrés gris n'est pas connu et empêche le calcul direct de leurs aires.
- Une première manière de « contourner l'obstacle » est de poursuivre le dessin jusqu'à obtenir les 64 carrés (par exemple, avec les 5 carrés des deux fragments dessinés, on n'arrive qu'à 14 carreaux blancs entiers, avec 10 carrés gris on arriverait à 24 carreaux blancs) et de s'arrêter à 32 carrés gris et de déterminer l'aire grise.
- Une procédure plus globale consiste à s'occuper de la partie entre les deux colonnes extérieures (composées de 4 carreaux blancs et 4 gris) pour ne retenir que les 64 carreaux blancs restants ; constater les répétitions de motifs verticaux comprenant un carré gris quatre petits triangle blancs et deux bandes dont on calcule facilement les aires respectives en unités du quadrillage: 2 blancs, 6 (2 + 2+ 2) gris ; en déduire qu'il y a 32 motifs répétés et calculer l'aire grise totale, par exemple (32 × 6) + (2 × 2) = 192 + 4 = 196.

Ou : toujours dans une procédure globale, constater l'égalité des aires grises et blanches (64 et 64) entre les deux bandes horizontales ce qui permet de trouver qu'il y a 32 carrés gris et de déterminer la longueur des deux bandes horizontales grises puis leur aire pour aboutir finalement à une calcul du genre: (2 × 64) + 64 + (2 × 2) = 196.

Il y a encore de très nombreuses manières d'organiser les parties de figures et les calculs correspondants.

Attribution des points

4 Réponse correcte (196 carreaux) avec un dessin complet colorié ou une explication du procédé de calcul (avec la détermination d'un motif répété et la prise en compte des deux bandes extérieures)

3 Réponse correcte avec explications insuffisantes (dessin incomplet, pas de motif répété, procédé de calcul pas explicite, …)

2 Réponse avec une erreur due à l'oubli des deux bandes des extrémités (par exemple 34 = 68:2 motifs), avec explications claires

ou un dessin complet correct avec une erreur de comptage

ou réponse 196 carrés sans dessin ni explications

1 Un dessin est proposé avec un nombre erroné de motifs mais la détermination correcte de l'aire de la partie grise d'un motif d'un carré gris central de la frise.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

10. EXTRA-TERRESTRES (Cat. 5, 6, 7, 8)

Sur une lointaine planète vivent cinq créatures étranges : ET1, ET2, ET3, ET4 et ET5 qui se reconnaissent à trois caractéristiques :

- une antenne,
- une trompe,
- une queue.

Chacune des cinq créatures a au moins une des caractéristiques, certaines ont deux caractéristiques, aucune n'a les trois caractéristiques.

On sait que:

- ET2 a une antenne ;
- ET3 a une queue mais ET1 n'en a pas ;
- ET1 et ET5 n'ont pas de trompe ;
- les cinq créatures sont toutes différentes,
- au total on compte trois trompes, deux queues et trois antennes.

Indiquez quelles sont les caractéristiques (antenne, trompe, queue) de ET4.

Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer les caractéristiques de cinq créatures par déductions logiques à partir d'une série d'informations partielles sur la présence ou non de certaines de ces caractéristiques.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'on est dans une fiction, en accepter les contraintes, imaginer les cinq personnages et leurs caractéristiques et s'en représenter éventuellement quelques-uns.
- Comprendre qu'il faudra tenir compte de toutes les données, qu'il sera nécessaire d'organiser les choix des caractéristiques et qu'il faudra se souvenir des premiers essais pour respecter l'ensemble des conditions (par des tableaux, dessins, listes, …).

  Il y a de très nombreuses façons de répartir les caractéristiques selon les cinq personnages. Par exemple: *ET1 n'a pas de queue ni de trompe, on sait donc qu'il n'a que des antennes* ; ou *puisque ET1 et ET5 n'ont pas de trompe et qu'il y a trois trompes en tout, ET2, ET3 et ET4 en ont une*. La difficulté principale se situe au moment où ont été trouvées les premières répartitions indiquées et qu'il reste à répartir la deuxième queue et la troisième antenne. Elles ne peuvent être attribuées qu'à ET5 pour éviter que deux créatures aient les mêmes caractéristiques.

	ET1	ET2	ET3	ET4	ET5
3 trompes	-	1	1	1	-
2 queues	-	-	1	?	?
3 antennes	1	1	-	?	?

- Compléter une « configuration » des cinq créatures et de leurs attributs (tableau, liste, grille …) et conclure que: ET1 a seulement une antenne; ET2 a une antenne et une trompe; ET3 une trompe et une queue ; ET4 n'a qu'une trompe et ET5 a une queue et une antenne.
- Commencer par utiliser les informations (au moins une caractéristique, mais pas trois, ET2 a des antennes ; ET3 a une queue mais ET1 n'en a pas ; ET1 et ET5 n'ont pas de trompe, au total on compte trois trompes) ; ce qui permet de connaître toutes les caractéristiques de ET1, ET2 et ET3. Procéder par essais et contrôle pour la répartition des antennes et queues entre ET3 et ET4.

Attribution des points

4 Réponse correcte (ET4 n'a qu'une trompe) avec explications (qui peuvent être la configuration totale des caractéristiques des 5 créatures par un tableau ou par une liste) ou une ou deux phrases de déductions ou négations où apparaissent les « connecteurs » logiques du genre : …puisque, … donc, ….parce que …, ne peut pas, … car, …)

3 Réponse correcte (ET4 n'a qu'une trompe), avec seulement une configuration partielle ou avec des commentaires qui ne donnent pas d'information sur les déductions (par exemple: « nous avons beaucoup réfléchi », « nous avons suivi les informations », « nous avons fait des essais »)

2 Réponse correcte (ET4 n'a qu'une trompe) sans explications

ou une configuration des cinq créatures avec une seule erreur (par exemple confusion antenne – trompe ou sans tenir compte de « tous différents »)

1 Début de configuration avec au moins « ET1 n'a qu'une antenne et ET2, ET3, ET4 ont une trompe »

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7, 8

Origine : Siena

11. LA LECTURE D'ISIDORE (Cat. 6, 7, 8)

Lundi, Isidore commence la lecture d'un nouveau livre et il lit la moitié des pages de ce livre.

Mardi, il lit la moitié des pages qu'il n'a pas lues le lundi.

Mercredi, il lit la moitié des pages qu'il n'a pas lues le lundi et le mardi.

A ce moment, il a déjà lu 84 pages du livre.

Combien de pages Isidore doit-il encore lire pour terminer son livre ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver la différence entre un nombre et la somme, qui est donnée, (84), de sa moitié, son quart et son huitième.

Analyse de la tâche

- Distinguer dans le temps les trois états de la lecture : la moitié le lundi, ajouté à la moitié du reste le mardi, ajouté enfin à la moitié du nouveau reste le mercredi.
- Traduire ces états successifs en parties lues et non lues à l'aide des fractions données et de 84 qui est la somme des parties lues (jour après jour, il y a 1 partie sur 2 ; 3 parties sur 4 ; 7 parties sur 8 qui correspondant à 84).
- Dans une résolution par essais, au hasard ou organisés, à partir d'un nombre de pages hypothétique, déterminer successivement les trois moitiés successives dont la somme est 84. Retenir ce nombre et calculer son écart à 84 pour trouver les pages à lire.
- Dans une résolution déductive ou « en compréhension » (avec un nombre quelconque provisoirement inconnu), trouver que le lundi il a lu la moitié des pages ; le mardi la moitié et la moitié du reste c'est-à-dire la moitié et un quart ou les trois quarts ; le mercredi soir, il a lu sept huitièmes des pages (1/2 + 1/4 + 1/8 = 7/8) et que donc 7/8 des pages représentent 84 pages. En déduire que 1/8 des pages représente 12 pages (84 : 7 = 12) et qu'il s'agit des pages à lire encore, ou que 8/8 des pages représentent 96 pages (12 × 8 = 96). Cette procédure exige une maîtrise des fractions, de leur addition, de leur décomposition et des fractions de fractions. Elle peut être illustrée par une représentation graphique de la succession des « moitiés ». (Par exemple au moyen de segments, rectangles, … utilisant le schéma pour déterminer combien de fois le reste est contenu dans le tout (8 fois). En déduire que 7 fois le reste correspond à 84 pages et donc que le reste est 12.)
- Dans une résolution algébrique, désigner par x le nombre de pages du livre et traduire le problème par l'équation $\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right) + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x\right)\right] = 84$ qui a pour solution 96. Enfin, calculer 96 - 84 = 12 qui est le nombre de pages restant à lire.

Attribution des points

4 Solution correcte (12 pages) avec des traces complètes de la procédure utilisée.

3 Solution correcte avec une justification incomplète
ou détermination du nombre total de pages (96) avec explications et oubli de mentionner le nombre des pages encore à lire

2 Le nombre de pages lues sur les 3 jours, 84, est reconnu comme les 7/8 du total

1 Essais respectant les données, mais non aboutis.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Bourg en Bresse

12. YVAN, LE CONFISEUR (Cat. 6, 7, 8, 9, 10)

Yvan range les bonbons qu'il fabrique dans des boîtes en forme de parallélépipèdes rectangles, de dimensions extérieures: 8 cm, 3 cm et 5 cm.

Il place ensuite ces boîtes dans des cartons, aussi en forme de parallélépipèdes rectangles, de dimensions intérieures 60 cm, 60 cm et 5 cm, avant de les expédier.

Combien de boîtes de bonbons peut-il placer au maximum dans chaque carton ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver votre solution.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer le nombre maximum de parallélépipèdes rectangles de dimensions extérieures 8, 3 et 5 (cm) qu'on peut disposer dans un parallélépipède rectangle de dimensions intérieures, 60, 60 et 5 (cm).

Analyse de la tâche

- Imaginer la tâche de remplissage de la grande boîte par des petites de manière à en mettre le plus possible ou de laisser le moins d'espaces vides. Un éventuel calcul du rapport des deux volumes permet de savoir que le « maximum théorique » est 150 = 18000/120 (ou 3600/24 après simplification par 5) petites boîtes dans la grande, afin d'évaluer les futures réponses successives trouvées.
- Se rendre compte que les petites boîtes peuvent être disposées avec 8 cm, 5 cm ou 3 cm en hauteur sur le fond de la grande boîte 60 × 60; que la première disposition n'est pas possible car elles dépasseraient de la grande boîte, que la disposition avec 3 cm en hauteur laisserait des vides de 2 cm qu'on ne pourrait plus combler et qu'il faudra adopter la disposition 5 cm en hauteur pour une utilisation optimale de l'espace. Le problème se réduit alors à trouver une disposition optimale des faces rectangulaires de 3 × 8 dans le « fond » carré de la grande boîte 60 × 60.
- Disposer 20 rectangles de largeur 3 les uns à côté des autres, pour obtenir un rectangle de 60 × 8, puis le reproduire sept fois et occuper un rectangle de 56 × 60 (*figure 1*).* On place ainsi 140 boîtes et il reste un espace libre de 4 × 60, dans lequel on peut encore placer 7 boîtes (après rotation d'un quart de tour) (*figure 2*).* L'espace libre est alors constitué d'une bande de 1 × 56 et d'un carré de 4× 4, c'est-à-dire 72 cm^2 du fond.
- Le reste de 72 cm^2 inutilisable, correspondant à la surface de 3 rectangles de 8 × 3, ou 3 boîtes, doit inciter à la recherche d'une meilleure disposition et à se demander si on ne peut pas éliminer la bande de 1 × 56.
- Une solution consiste à ne placer que 6 files de 20 rectangles (*figure 3*)* pour occuper un rectangle de 48 × 60 (au lieu de 56 × 60) avec un rectangle de 12 × 60 (12 est un multiple de 3) encore à disposition, dans lequel on peut placer 7 blocs de 4 rectangles (après rotation d'un quart de tour) les uns à côté des autres (*figure 4*)*. On a ainsi placé 6 × 20 + 7 × 4 = 148 rectangles. Il n'y a plus de bande inoccupée et il reste à disposition un rectangle de 4 × 12 dans lequel on peut encore placer une 149e boîte, avec une partie inoccupée de 24 cm^2 du fond, mais constituée d'une bande de 1 × 12 et d'un rectangle de 3 × 4 dans lequel on ne peut pas placer une 150e boîte (*figure 5*).*
- Il reste à se convaincre qu'il n'y a pas de meilleure disposition, mais on ne dispose pas de démonstration.

** les figures sont à la page suivante*

Attribution des points

4 Réponse 149, avec détails de la disposition des boîtes (dessin, description par couches …)

3 Réponse 149 sans explications ou avec explications peu claires
ou réponse 148 avec détails de la disposition

2 Réponse 148 sans explications ou avec explications peu claires
ou réponse 147 avec détails de la disposition

1 Réponse 150 par procédure arithmétique (rapport des volumes 1200 : 8)
ou réponse entre 140 et 146 avec détails de la disposition

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8, 9, 10

Origine : Groupe Géométrie 3D

figure 1 (140)

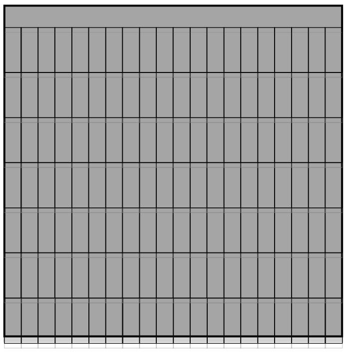
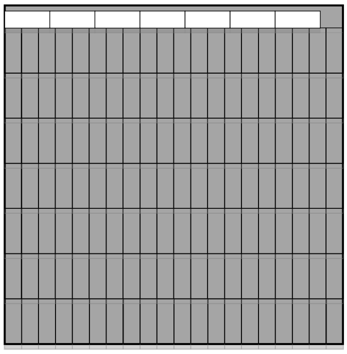


figure 2 (147)



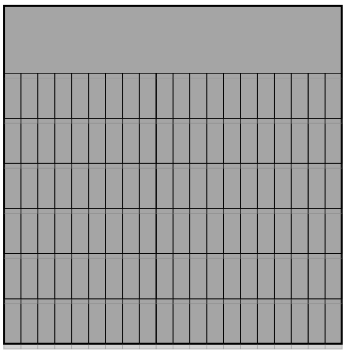


figure 4 (148)

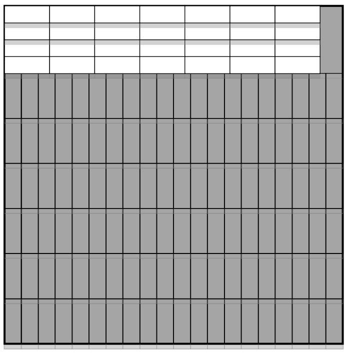


figure 5 (149)

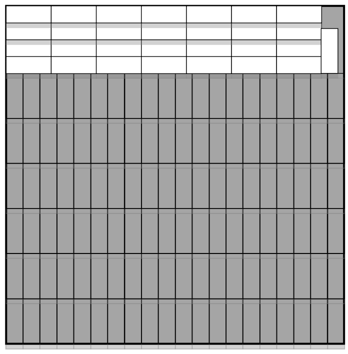


figure 3 (120)

13. GRILLE DE NOMBRES (Cat 6, 7, 8, 9, 10)

En explorant un château abandonné, Zoé et ses amis ont trouvé le dessin d'une grille occupant entièrement un mur d'un ancien cachot.

L'humidité et les années ont effacé une grande partie des nombres écrits dans les cases de cette grille, mais ceux qui restent montrent que le prisonnier qui a dessiné la grille suivait des règles bien précises pour passer d'un nombre au suivant, dans chaque ligne et dans chaque colonne.

Zoé a pris deux photos des parties A et B du mur comme sur cette figure :

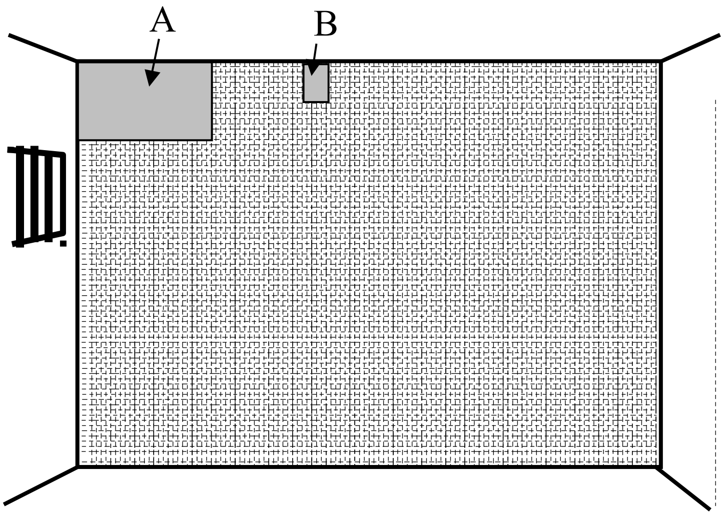


Photo A *: le haut du mur à gauche, les cinq premières lignes et les onze premières colonnes*

1	2	3			6				10	11
			8	10	12				20	22
3	6	9	12					27	30	33
		12	16	20			32	36	40	
	10			25	30	35	40			55

Photo B *: six cases Avec 111 sur la 3e ligne*

	111

Puis elle a encore pris trois autres photos, d'autres parties du mur:

Photo C

187	198
204	

Photo D

209				285

Photo E

110			
			192

Écrivez les nombres qui manquent dans les quatre photos *B*, *C*, *D* et *E*.

Expliquez comment vous avez fait pour les trouver.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter des fragments d'une table de multiplication en se référant aux suites de multiples de chaque ligne et de chaque colonne.

Analyse de la tâche

- Constater, d'après la photo A, que la grille de nombres est constituée de suites aux « régularités déjà rencontrées » dans les lignes et les colonnes et percevoir qu'il s'agit de la « table de multiplication »*, dont chaque ligne et chaque colonne sont constituées des multiples du premier nombre (à gauche, respectivement, en haut).
- Pour la photo B, se rendre compte que 111, sur la troisième ligne est le troisième multiple de 37 (3 × ? = 111 ou 111 : 3 = 37) et que la colonne précédente est celle des multiples de 36.
- Pour la photo C, 198 – 187 = 11 et 204 – 187 = 17, déterminent la 11e ligne et la 17e colonne.
- Pour la photo D, 209 et 285 sont des multiples d'un même nombre, leur différence 285 – 209 = 76 vaut quatre fois ce nombre : 19 (76 : 4). Les deux nombres se situent donc sur la 19e ligne. 209 = 19 × 11 se situe dans la 11e colonne, 285 = 19 × 15 se situe dans la 15e colonne.
- Pour la photo E, on peut par exemple considérer les diviseurs de 110 (1 ; 2 ; 5 ; 10 ; 11 ; 22 ; 55 ; 110) et savoir que ce nombre peut se trouver dans les lignes ou colonnes 1 et 110, 2 et 55, 5 et 22 ou 10 et 11 puis après quelques essais trouver 5 pour la colonne et 22 pour la ligne qui correspondent à la colonne 8 et à la ligne 24 pour 192.

  Une autre manière est de chercher aussi les diviseurs de 192 (1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 8 ; 12 ; 16 ; 24 ; 32 ; 48 ; 64 ; 96 ; 192) et de trouver des couples qui diffèrent de 2 (pour les lignes) : 22 et 24 et de 3 (pour les colonnes) : 5 et 8.

  Remplir ensuite les quatre tableaux :

36	37
72	74
108	111

B

187	198
204	216
221	234

C

198	216	234	252	270
209	228	247	266	285

D

110	132	154	176
115	138	161	184
120	144	168	192

E

Attribution des points

4 Les quatre photos complétées correctement, avec quelques explications (reconnaître la « table de multiplication », suites de multiples, essais et erreurs pour la photo E …), (on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo)

3 Les quatre photos complétées correctement, sans aucune explication (on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo)

ou trois photos complétées correctement avec quelques explications

2 Trois photos complétées correctement, sans aucune explication (on admet une seule erreur de calcul ou inattention par photo)

ou deux photos complétées correctement avec quelques explications

1 Une seule photo complétée correctement

0 Incompréhension du problème

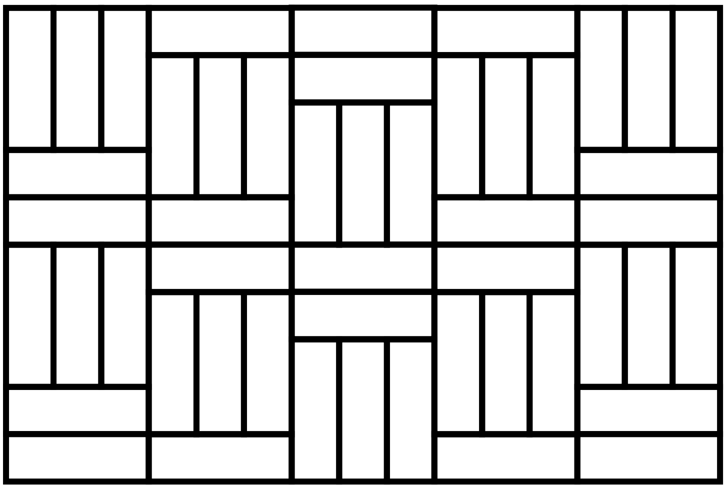
Niveaux: 6, 7, 8, 9, 10

Origine: fj

** Il y a ici une très légère entorse à la rigueur mathématique car on pourrait théoriquement trouver d'autres fonctions que celles de la table de multiplication, correspondant aux nombres donnés dans la grille, mais très difficiles à définir.*

14. LE PARQUET (Cat. 7, 8, 9, 10**)**

Voici l'image du parquet d'une pièce rectangulaire fait de lames toutes identiques.



Le périmètre de la pièce est de 15 m. Les lames coûtent 30 euros par mètre carré.

Quel est le prix total des lames qu'il a fallu utiliser pour réaliser ce parquet ?

Expliquez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Le dessin d'un parquet rectangulaire fait de lames rectangulaires toutes identiques étant donné, ainsi que son périmètre, calculer le prix de l'ensemble des lames du parquet connaissant le prix des lames au mètre carré.

Analyse de la tâche

- Observer la figure et percevoir ses régularités, déduites de l'isométrie des rectangles qui composent le pavage : la longueur des lames est le triple de leur largeur ; c'est la « relation clé » de la situation qui suggère de prendre la largeur d'une lame comme unité ou d'imaginer une trame carrée (quadrillage) sur laquelle est construit le pavage, chaque rectangle recouvrant 3 carrés unités de la trame.
- Dans cette perception de la trame ou de la largeur d'une lame comme unité, les dimensions de la pièce sont 10 et 15 en côtés de carrés-unités, le périmètre est 50 = (10 + 15) × 2 dans cette unité.
- Par proportionnalité : 50 (unités) ⇔ 15 (en m) détermine le rapport 15/50 ou 3/10 ou 0,3 et permet de déduire les dimensions de la pièce : 3 et 4,5 (en m).
- Passer ensuite à l'aire du parquet : 3 × 4,5 = 13,5 (en m^2) et au prix des lames qui est 13,5 × 30 = 405 (en euro).

Ou, par une procédure algébrique, exprimer les dimensions par des lettres (par exemple x et y pour la largeur et la longueur des lames, puis substituer y par $3x$ pour aboutir à l'équation : $2(15x + 10x) = 15$ puis $50x = 15$).

Ou mesurer les dimensions sur un plan, celui de l'énoncé ou un autre réalisé en respectant les rapports, calculer le périmètre de la pièce sur le plan, en déduire l'échelle et déterminer par proportionnalité les dimensions réelles de la pièce, puis calculer le prix du parquet.

Ou procéder par essais.

Attribution des points dimensions,

4 Réponse correcte (405 euro) avec explications complètes (transformation d'unité, dimensions, aire, prix)

3 Réponse correcte (405 euro) avec explications incomplètes
ou une seule erreur de calcul dans la détermination des dimensions des lames avec une réponse erronée mais cohérente du prix total avec explications

2 Réponse correcte (405 euro) sans explications
ou réponse voisine obtenue à partir de dimensions mesurées sur un dessin respectant les proportions
ou calcul correct des dimensions mais oubli du calcul du prix total

1 Début de raisonnement correct (le rapport 3 entre dimensions des lames est mentionné, …)
ou choix de dimensions ne correspondant pas à la figure, avec toutefois un périmètre de 15 m avec un calcul d'aire et de prix cohérent avec les dimensions choisies

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine: Siena

15. NOËL GOURMAND (Cat. 7, 8, 9, 10)

Pour la période des fêtes de Noël, une fabrique de pâtisseries reçoit une commande pour une livraison de 16 500 panettones. Dans les deux premiers jours de travail, les 8 machines de l'usine ont produit 1500 panettones.

Craignant de ne pas pouvoir respecter la date de livraison, le propriétaire décide d'emprunter 12 machines supplémentaires, identiques aux siennes, et de les faire travailler toutes ensemble.

Combien de jours seront encore nécessaires pour terminer le travail ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer le temps nécessaire à un nombre donné de machines pour terminer une production d'un certain nombre d'objets, connaissant le temps mis par un plus petit nombre de machines pour produire une partie des objets.

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre de jours requis dépend à la fois du nombre de machines et du nombre de panettones à produire ; dans ce cas, combien de jours sont nécessaires à 20 machines pour produire les 15000 qui manquent.
- Calculer combien de panettones produit chaque machine en un jour, avec l'opération 1500 : 8 : 2 = 93,75; 20 machines qui marchent ensemble produisent 93,75 × 20 = 1875 panettones par jour et donc, pour produire les 15000 panettones qui manquent il faut 15000 : 1875 = 8 (jours).

  (Il n'est cependant pas nécessaire de revenir à l'unité. Une production de 750 panettones avec 8 machines par jour donne les 1875 gâteaux avec 20 machines par jour.)

Ou: observer que 15000 est 10 fois 1500 et donc que, si 8 machines en 2 jours produisent 1500 panettones, 80 machines, en 2 jours, en produisent 15000 ; 20 machines (20 = 80 : 4) utiliseront alors 2 × 4 = 8 (jours).

Ou: faire recours explicitement à la proportionnalité ; par exemple, en fixant le nombre de machines et en indiquant par y le nombre de jours, on a la proportion :

1500 : 15000 = 2 : y d'où y = 3000 : 150 = 20 (jours) ;

puis, en maintenant constant le nombre de panettones et indiquant par x le temps en jours, on a la proportion suivante : 20 : 8 = 20 : x d'où x = 160 : 20 = 8 (jours).

Ou, par tranches de deux jours: le 1e et le 2e : 1500 panettones avec 8 machines; le 3e et le 4e: 1500 + 1500 + 750 = 3750 panettones avec 12 + 8 = 8 + 8 + 4 machines; après les 5e et 6e, puis les ; 7e et 8e jours on arrive à 12750 et il manque encore 3750 (=16500-12750) produits en deux jours. Total : 10 jours, il reste encore 8 jours.

Attribution des points

4 Réponse correcte (8 jours) avec des explications claires et détaillées

3 Réponse correcte (8 jours) avec des explications peu claires ou incomplètes

2 Réponse correcte sans explications

ou démarche correcte mais avec une seule erreur de calcul

ou réponse « 10 jours » en confondant la durée totale du travail avec celle pour terminer le travail, avec explications claires

1 Début de raisonnement correct

ou réponse « 10 jours » avec explications peu claires ou incomplètes

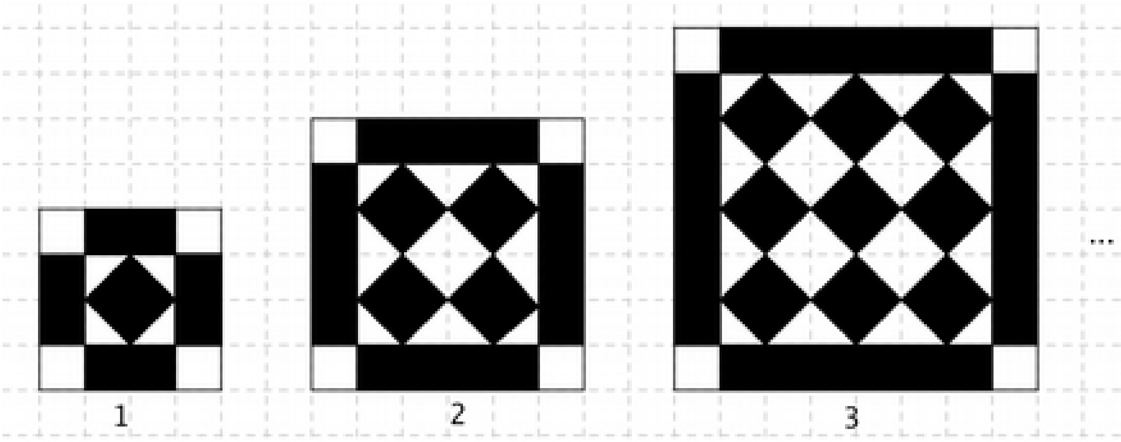
0 Incompréhension du problème

Niveaux: 7, 8, 9,10

Origine: Campobasso

16. TOUJOURS PLUS GRANDS (Cat. 8, 9, 10)

Le dessin ci-dessous représente les trois premières figures, de rangs 1, 2, 3, d'une suite régulière dessinées sur papier quadrillé. Leur « cadre extérieur » a toujours la même épaisseur, l'intérieur est formé de carrés noirs alignés, dont le nombre de colonnes et de lignes augmente de 1 d'une figure à la suivante.



Pour une des figures de cette suite régulière, si on fait la différence entre l'aire des parties noires et l'aire des parties blanches, on trouve 196 (carrés du quadrillage).

Quel est le rang de cette figure ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Une suite de figures régulières dessinées sur quadrillage, colorées en noir et en blanc, est donnée par ses trois premiers éléments. Déterminer le rang de la figure dont la différence des aires blanches et noires est 196.

Analyse de la tâche

- Observer les trois figures et en déterminer les caractéristiques, variables et constantes et imaginer ou dessiner une quatrième ou cinquième figure éventuellement.

  Parmi les caractéristiques constantes on peut relever les quatre carrés blancs des angles extérieurs, la largeur des rectangles extérieurs, la structure en damier, … Parmi les caractéristiques variables : le côté du damier (rang des figures : 1, 2, 3), le côté extérieur (4, 6, 8, 10, …) le nombre de carré noirs : 1, 4, 9, 16 …
- Passer à l'inventaire des aires blanches et noires figure par figure ou, plus simplement, passer directement à la différence des aires, qui est due seulement aux bordures noires extérieures dès qu'on a remarqué que les parties blanches et noires du damier sont équivalentes.

  On arrive ainsi à la suite numérique des différences des aires noire - blanche :

  $4 \times 2 - 4 = 4$; $4 \times 4 - 4 = 12$; $4 \times 6 - 4 = 20$; $4 \times 8 - 4 = 28$; …

  qui conduit à la progression arithmétique de raison 8 : 4 ; 12 ; 20 ; … ;100 ; … ; 180 ; 188 ; **196 ;**

  dont il reste à déterminer le rang, **25.**

  Cette tâche assez délicate peut se faire par le comptage des termes de la progression lorsque ceux-ci sont tous écrits ou par des relations du genre $4 + 24 \times 8 = 196$ qui peuvent aboutir à l'erreur 24 si on oublie de compter le premier terme.

  Il y a évidemment de très nombreuses autres manières d'arriver au calcul des aires, de leur différence et à la détermination du rang, par listes, tableaux, inventaires, ou autres constatations … jusqu'au passage à l'algèbre (colonne « n » ci-dessous) et à l'équation $8n - 4 = 196$ qui conduit à $n = (196 + 4)/8 = 25$.

Rang	1	2	3	4	n
Aire blanche B	6	12	22	36	$2n^2 + 4$
Aire noire N	10	24	42	64	$2n^2 + 8n$
Aire totale B + N	16	36	64	100	$(2n + 2)^2$
Différence N – B	4	12	20	28	$8n - 4$

Attribution des points

4 Réponse correcte (25e figure) avec explications claires (pas de différence pour la partie intérieure, progression arithmétique 4 ; 12 ; 20 ; 28 ; … pour les différences)

3 Réponse correcte (25e figure) avec explications peu claires
ou réponse 24e figure avec explications claires

2 Différence entre aires blanches et noires correctement calculée pour les trois premières figures avec une erreur dans sa généralisation.
ou réponse correcte sans explications
ou réponse 50 qui correspond au nombre de carrés noirs sur le côté de la figure de rang 25 et au raisonnement suivant :
- la différence des aires des parties noires et blanches est égale à la différence des aires sur les bordures
- si n désigne le nombre de carrés noirs sur le côté de la figure, la différence d'aire est de $4n – 4 = 196$

1 Début de recherche cohérente

0 Incompréhension du problème

Niveaux: 8, 9, 10

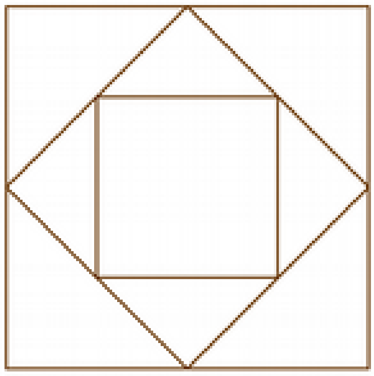
Origine: Siena

17. À LA PLAGE (Cat. 9, 10)

Sylvie construit des châteaux de sable en forme de pyramide avec trois moules en plastique.

Chaque moule est une pyramide régulière de base carrée dont la mesure de la hauteur est égale à celle des côtés du carré de la base : 24 cm pour le plus grand moule.

Sylvie a marqué sur le sable l'empreinte des bases de ses trois moules, comme le montre la figure représentée ci-contre. Les sommets du petit carré sont les milieux des côtés du carré moyen. Les sommets du carré moyen sont les milieux des côtés du grand carré.



Sylvie remplit de sable la plus petite pyramide, à ras-bord, et verse son contenu dans la plus grande.

Combien de fois doit-elle verser le sable de la petite pyramide dans la grande pyramide pour la remplir à ras-bord ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

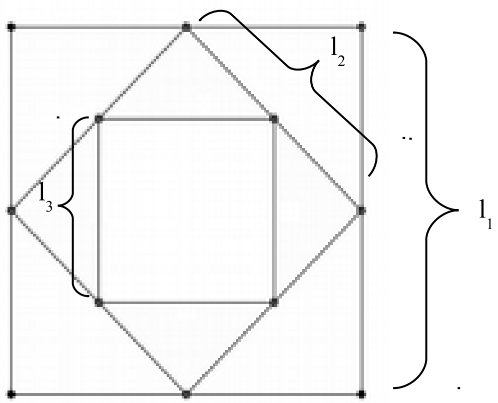
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Calculer le rapport entre les volumes de deux pyramides semblables à base carrée.

Analyse de la tâche

- Imaginer les trois pyramides et comprendre qu'elles sont vides et qu'on peut les remplir de sable.
- Comprendre qu'on demande de calculer le rapport entre les volumes de la première pyramide (la plus grande) et de la troisième pyramide (la plus petite).
- Se rendre compte qu'il faut calculer la mesure du côté de la base et de la hauteur de la petite pyramide ou raisonner sur le rapport entre les mesures des deux pyramides.
- Observer que le côté de la base de la troisième pyramide l_3 est la moitié de celui de la première l_1, donc 12 cm.



Ou calculer successivement le côté de la base de la deuxième pyramide l_2 et de la troisième pyramide l_3 par Pythagore ou en observant que l_2 est la moitié de la diagonale du carré de côté l_1, et l_3 est la moitié de la diagonale du carré de côté l_2 :

$l_2 = 12\sqrt{2}$ et $l_3 = 12$ (cm).

- Calculer les volumes des première et troisième pyramides $V_1 = 24^3/3 = 4608$ (cm^3), et $V_3 = 12^3/3 = 576$ (cm^3)
- Calculer le rapport entre les deux volumes $4608/576 = 8$

  ou, déduire directement du rapport 2 entre les longueurs correspondantes de la grande et de la petite pyramide que le rapport des volumes est $2^3 = 8$.

Attribution des points

4 Réponse correcte (8) avec des explications complètes et claires

3 Réponse correcte (8) mais avec des explications peu claires ou incomplètes
ou réponse incorrecte à cause d'une seule erreur de calcul mais avec des explications claires et complètes

2 Réponse correcte sans aucune explication
ou réponse incorrecte à cause d'une erreur de calcul, avec des explications peu claires ou incomplètes
ou absence de réponse mais calcul correct des deux volumes

1 Début de recherche cohérente (par exemple, calcul correct des côtés de base des pyramides)

0 Incompréhension du problème

Niveau: 9, 10

Origine: Parma

18. ETRANGE DECOUPAGE (Cat. 9, 10)

Antoine dit à ses amis : « Je vous propose un problème !

1. Je dessine un rectangle, de 6 sur 8 carreaux et le découpe en un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit mesurent 6 et 7 (côtés des carreaux) et un trapèze; comme sur la *figure a.*
2. Je déplace le trapèze par une translation vers le bas et la gauche comme sur la *figure b.*
3. Je découpe le petit triangle qui dépasse du trapèze en bas à gauche, comme sur la *figure c*.
4. Je le déplace et le mets en haut à droite, comme sur la *figure d*. »

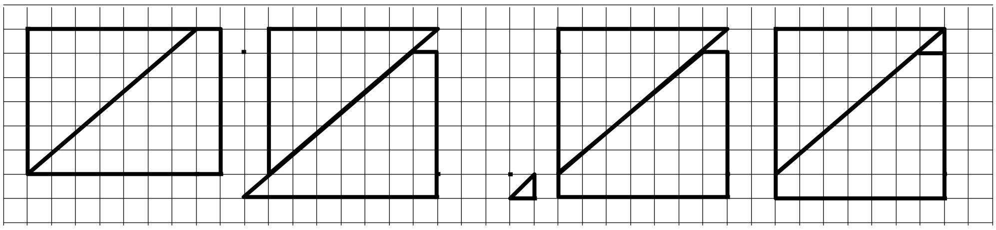


figure a *figure b* *figure c* *figure d*

« Comme vous pouvez le voir, à partir d'un rectangle de 6 sur 8 carreaux, j'ai obtenu un carré de 7 sur 7 carreaux ! »

Cette dernière affirmation d'Antoine est-elle vraie ? ou s'agit-il d'une illusion ?

Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Découvrir et expliquer une « illusion » visuelle dans un déplacement de figures qui semble transformer un rectangle de 6 × 8 carreaux en un carré de 7 × 7 carreaux.

Analyse de la tâche

- Lire la description des opérations géométriques et la vérifier sur les figures.
- Se rendre compte que l'aire du rectangle de 6 × 8 est 48 (carreaux) alors que celle du carré de 7 × 7 est 49 et qu'il y a une « apparition » d'un 49e carreau, d'où un « conflit » entre l'observation des figures et la conservation de leur aire.
- Se convaincre que les déplacements des pièces conservent l'aire, en conclure qu'il y a une imprécision dans les figures et la rechercher par l'une des démarches suivantes par exemple (il y en a de nombreuses) :

  - vérifier les aires des pièces : 21 pour le triangle, 27 pour le trapèze (correspondant aux 48 du rectangle) et, semble-t-il, 1/2 pour le petit triangle (ce qui ne correspond pas au 49 du carré) ; ou vérifier les dispositions et la translation sur le quadrillage ;

  - ou vérification arithmétique des dimensions du rectangle de la *figure d* dont l'aire est 48, une des dimensions est 7 et l'autre est 48/7 ≈ 6,86. Cette figure n'est donc pas un carré, le trapèze y est décalé de 0,14, ou il y a un espace non visible sur la figure entre le triangle et le trapèze ;

  - ou voir que le déplacement du trapèze ne suit pas une diagonale de carré du quadrillage, mais une direction voisine ;

  - ou agrandir la figure pour distinguer l'espace entre les deux pièces ;

  - ou se rendre compte que le petit triangle rectangle n'est pas isocèle (ses côtés de l'angle droit mesurent 1 et 6/7 ≈ 0,86) ce qui montre que le côté inférieur du trapèze n'est pas sur la ligne du quadrillage mais un peu plus haut (de ≈ 0,14).
- Répondre à la question par « non » (l'affirmation n'est pas vraie) « c'est une illusion » ; puis rédiger une explication.

Attribution des points

4 L'illusion est perçue et exprimée avec une justification claire (contradiction liée à la non conservation des aires), avec détail du calcul des dimensions du « faux carré » (7 × 48/7) ou autre calcul correct de dimensions

3 L'illusion est perçue et exprimée, mais la justification ne présente aucun calcul de mesures (seulement un dessin précis ou agrandi sur lequel on « voit » le décalage ou observation que la translation ne se fait pas dans la direction

des diagonales de carreaux, …)

2 L'illusion est perçue et exprimée mais la justification se limite à la constatation que le « faux carré » est un rectangle, (sans calculs)

1 L'illusion semble perçue mais est expliquée seulement par la constatation que l'aire totale est modifiée (de 48 à 49)

0 Incompréhension du problème
ou : réponse « l'affirmation d'Antoine est vraie » car les aires sont modifiées dans le déplacement

Catégories: 9, 10

Origine : fj