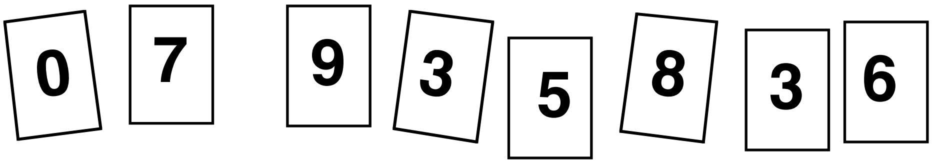
	Titre	Catégories	Thème	Origine
1.	Nombres inconnus	3 4	numération	6.I.03
2.	Les bonnes sommes	3 4	addition de nombres naturels (< 50)	SR
3.	Les trois maisons	3 4 5	reconstitution logique	6.I.05
4.	Le jeu du rectangle	3 4 5	placement de « T » sur une grille	SI/11.F.04
5.	En plein dans la cible	3 4 5	addition de termes « 3 », « 4 » et « 6 »	SI
6.	Des chiffres et … des chiffres	4 5 6	numération de 1 à 260	SI
7.	Drapeaux multicolores	5 6	combinaisons de couleurs	LU/17.F.04
8	Pavage décoratif	5 6	pavage à compléter et comptage	SI
9.	Le cœur de Martine	5 6	comparaison d'aires sur quadrillage	PR
10.	Les dessins du Grand-père	6 7	développements de pyramides	RV/17.I.13
11.	Boules et tiges	6 7 8	arbre binaire et puissances de 2	PR
12.	L'escalier	6 7 8	multiples communs de 2 et 3	SI
13.	L'équipe d'Enrico	7 8 9 10	combinaison de multiples	SI
14.	Le village touristique	7 8 9 10	grille à reconstituer + vision spatiale	MI
15.	Nombres pairs à la loterie	7 8 9 10	sommes de nombres pairs	SI/12.I.14
16.	La terrasse de Joseph	7 8 9 10	figures géométriques et aires	RV
17.	Jouer à *Free Cell*	8 9 10	évolution de pourcentages	SS
18.	La courroie de Luc	9 10	longueur de cercles - approximations	PR/0^0
19.	La cueillette des pommes	9 10	combinaisons de vitesses de travail	SI

1. NOMBRES INCONNUS (Cat. 3, 4)



En utilisant toutes ces cartes, une seule fois chacune, vous devez former des nombres tels que :

- ces nombres doivent être compris entre 25 et 62,
- il ne doit pas y avoir deux nombres qui se suivent (la différence entre deux de ces nombres doit toujours être plus grande que 1).

Quels sont ces nombres ?

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Avec 8 chiffres donnés : 0 ; 7 ; 9 ; 3 ; 5 ; 8 ; 3 ; 6, former quatre nombres de deux chiffres compris entre 25 et 62, sans que deux d’entre eux soient consécutifs

Analyse de la tâche

- Constater qu’il y a huit chiffres donnés, qu’on devra tous les utiliser pour former des nombres compris entre 25 et 62, ayant donc chacun deux chiffres. En déduire qu’il faudra former quatre nombres de deux chiffres.
- Grouper les chiffres deux par deux, au hasard, puis procéder par contrôles et éliminations successives.

Ou : conduire une réflexion préalable sur les chiffres qui pourront se trouver dans les unités et ceux qui pourront se trouver dans les dizaines. Par exemple constater que le 0 sera dans les unités, ainsi que les chiffres 7, 8 et 9 et qu’on a ainsi réparti les 8 chiffres en deux groupes : 3, 3, 5, 6 pour les dizaines, 7, 8, 9, 0 pour les unités. Le 6 devra alors être associé au 0 pour ne pas dépasser 62, les deux 3 aux 7 et 9 pour ne pas avoir de nombres consécutifs et constater qu’il n’y a qu’une association possible : 37, 39, 58 et 60.

Entre ces deux procédures, l’une par essais et éliminations et l’autre par déductions logiques, il y a une grande variété de démarches « intermédiaires » ; les déductions logiques apparaissant au fur et à mesure des essais.

Attribution des points

4 Les quatre nombres sont trouvés (37, 39, 58, 60) avec une explication sur la manière de choisir les chiffres des dizaines et des unités, conduisant à la quasi certitude de l’unicité de la solution. Par exemple, 7, 8 et 9 ne peuvent pas être des chiffres des dizaines car les numéros sont inférieurs à 62.

3 Les quatre nombres sont trouvés, avec une explication qui fait état d’une recherche par essais avec éliminations successives, mais ne permet pas de se convaincre qu’il n’y a qu’une solution. Exemple : « Nous avons fait des essais au hasard jusqu’à ce que nous trouvions cette solution »,

ou les quatre nombres (38, 39, 57, 60) avec une explication complète (comme pour 4 pts) mais oubli de contrôler que le couple de nombres 38 et 39 sont consécutifs.

2 Les quatre nombres sont trouvés, sans explications ou avec des arguments qui « n’expliquent » pas la démarche mentale suivie ; par exemple, « nous avons découpé les nombres et les avons regroupés deux par deux » ou « nous avons assemblé les nombres du plus petit au plus grand … »,

ou les quatre nombres (37, 38, 59, 60) avec une explication complète (comme pour 4 pts) mais oubli de contrôler que les deux couples 37 et 38 comme 59 et 60 sont des nombres consécutifs.

1 Réponse où plus de quatre nombres sont présentés (certains chiffres sont utilisés plusieurs fois)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Problème 6e RMT.I.03

2. LES BONNES SOMMES (Cat 3, 4)

La maîtresse a écrit ces dix nombres au tableau :

4 23 27 10 5 13 17 3 2 21

Utilisez chacun de ces dix nombres, une seule fois, pour compléter les cinq additions suivantes :

…. + …. = 15

…. + …. = 25

…. + …. = 34

…. + …. = 7

…. + …. = 44

Expliquez comment vous avez fait pour trouver la place des dix nombres.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Avec les 10 nombres : 2, 3, 4, 5, 10, 13, 17, 21, 23, 27, former 5 couples dont les sommes sont 7, 15, 25, 33, 44.

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faudra utiliser chacun des dix nombres et que la tâche est de les répartir par groupes de deux pour que les additions soient justes.
- Une stratégie est de partir de l'une des cinq sommes, de chercher les couples correspondants puis, pour chacun d'eux d'envisager la recherche des autres sommes à compléter avec les huit nombres qui restent.

  Par exemple en commençant par 44, il y a deux couples possibles : (21 ; 23) et (27 ; 17) :

  Avec 21 + 23 = 44, il reste huit nombres : 2, 3, 4, 5, 10, 13, 17, 27 qui ne permettent pas de former un couple dont la somme est 34. Il faut donc renoncer à 21 + 23 = 44 et adopter 27 + 17 = 44 et il restera les huit nombres 2, 3, 4, 5, 10, 13, 21, 23 pour poursuivre la recherche. Puis le couple (13 ; 21) sera le seul dont la somme est 34.

  Puis le couple (23 ; 2) sera le seul des six nombres 2, 3, 4, 5, 10, 23 pour obtenir 25. Finalement, avec les quatre nombres 3, 4, 5, 10 on obtient 10 + 5 = 15 et 3 + 4 = 7.
- Une autre stratégie est d'envisager d'abord les sommes possibles avec les dix nombres donnés et éventuellement d'en dresser un inventaire. On pourra constater alors que la somme 34 n'apparaît que pour le couple (21 ; 13) alors que pour les autres sommes 44, 25, 15 et 7, il y a à chaque fois deux couples. Eliminer alors les couples avec les termes 13 et 21 (23 + 21 ; 4 + 21 et 13 + 2) pour obtenir 44 = 27 + 17, 25 = 2 + 23, 15 = 10 + 5. Et finalement 7 = 4 + 3 qui sont les seuls termes encore à disposition.
- Une autre procédure est de travailler par essais en additionnant au hasard deux des dix nombres, avec les contrôles nécessaires.

Attribution des points

4 Résultat correct et complet (7 = 3 + 4 ; 15 = 10 + 5 ; 25 = 23 + 2 ; 34 = 21 + 13 ; 44 = 27 + 17) avec démarche claire qui montre par exemple l'ordre dans lequel les calculs ont été traités

3 Résultat correct et complet sans explications
ou 4 sommes correctes, sans répétition et avec explications

2 Trois ou quatre des sommes correctes, sans répétition d'un nombre et sans explications

1 Trois ou quatre des sommes correctes mais avec répétition d'un même nombre
ou deux des sommes correctes et éventuellement d'autres sommes incorrectes, mais sans répétition d'un même nombre

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : Suisse romande

3. LES TROIS MAISONS (Cat. 3, 4, 5)

Trois commerçants, un Suisse, un Italien et un Français habitent dans ces trois maisons de la même rue, qui sont de couleurs différentes.

Le boucher habite dans la maison jaune qui est à côté de la rouge mais qui n'est pas à côté de la verte.

L'épicier, qui n'est pas Suisse, habite à côté du Français.

L'Italien habite au numéro 21 et sa maison n'est pas jaune.

Quelle est la nationalité du pharmacien et de quelle couleur est sa maison ?

Expliquez comment vous avez trouvé.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Reconstituer une répartition de 3 personnes de nationalités différentes, dans trois maisons de couleurs différentes, de 3 métiers différents à partir d'affirmations, négations et relations de voisinage

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a trois nationalités, trois professions et trois couleurs à partir d'une première lecture.
- Lire une à une les informations, constater qu'il faudra parfois en combiner plusieurs pour pouvoir déterminer progressivement les caractéristiques de chaque maison et chaque individu. Par exemple : la maison jaune à côté de la rouge n'est pas à côté de la verte, implique que la rouge est au milieu et que la jaune et la verte sont aux extrémités ; puis l'Italien habitant au numéro 21, qui est à une extrémité dans une maison qui n'est pas jaune est donc dans la maison verte. On sait alors que le boucher de la maison jaune est au 25, que la maison du milieu est rouge et que l'Italien habite au 21 dans la maison verte. Comme il n'est pas suisse ni français, c'est lui l'épicier et il ne reste qu'un choix pour la maison rouge : c'est celle du pharmacien, qui est français.

Ou, émettre une hypothèse concernant la première information et la vérifier avec les autres ou la rejeter, puis procéder, pas à pas, jusqu'à la description complète de chaque maison.

La configuration définitive est, pour les couleurs :	21 vert	23 rouge	25 jaune
pour les nationalités :	Italien	Français	Suisse
pour les professions :	épicier	pharmacien	boucher

Attribution des points

4 La solution : « Le pharmacien est français et habite la maison rouge », avec une explication consistant à donner la configuration complète et une description d'une au moins des relations logique (par exemple : l'épicier est italien parce qu'il n'est pas suisse et qu'il habite à côté du Français) avec des termes du genre « parce que », « vu que », « comme il n'est pas … »

3 La solution : « Le pharmacien est français et habite la maison rouge », avec une explication se limitant à donner la configuration totale avec des commentaires du genre : « on a suivi les informations », « on a essayé les possibilités »

2 La solution : « Le pharmacien est français et habite la maison rouge », sans explications ou avec des commentaires ne donnant aucune information sur la démarche (Par exemple : « nous avons beaucoup réfléchi »)

1 Réponse avec une seule erreur, ou sur la couleur ou sur la nationalité du pharmacien

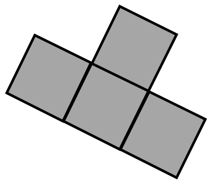
0 Incompréhension du problème

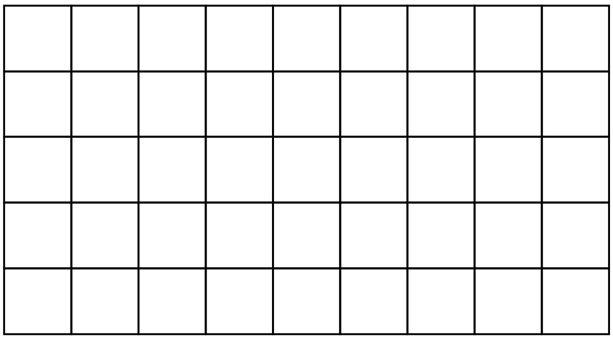
Niveau : 3, 4, 5

Origine : Problème 6e RMT.I.05

4. LE JEU DU RECTANGLE (Cat. 3, 4, 5)

Le jeu consiste à dessiner sur le rectangle ci-dessous
le plus grand nombre possible de pièces de cette forme :





Chacune de ces pièces doit recouvrir exactement quatre cases du rectangle.
Les pièces ne doivent pas se superposer.

Combien de pièces, au maximum, réussissez-vous à dessiner sur ce rectangle ?
Faites un dessin précis.

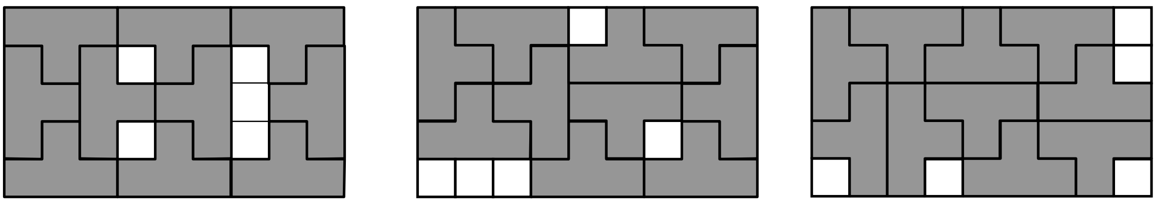
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Paver une grille rectangulaire de 5 × 9 carreaux avec un maximum de pièces en forme de « T » de quatre carreaux.

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour disposer le plus grand nombre de pièces possible, on a besoin de les placer les unes à côté des autres pour limiter les espaces vides.
- Se rendre compte que le rectangle contient 45 cases, que chaque pièce est composée de 4 cases, et déduire qu'on pourrait en placer au maximum 11.
- Commencer à disposer les premières pièces comme on le fait en général pour un pavage (en commençant par un angle). Puis disposer les autres pièces en travaillant avec un dessin ou des pièces découpées et se rendre compte qu'il reste des trous.
- Comprendre que pour réussir, il faudra les disposer autrement (en faisant des rotations).
- Finalement, trouver une des nombreuses configurations qui utilise 10 pièces et laisse 5 espaces vides dans le rectangle qui ne correspondent pas à la forme d'une pièce, comme dans les exemples ci-dessous :



Attribution des points:

4 Solution optimale (10 pièces) avec un dessin clair et précis
3 Solution avec 9 pièces et un dessin clair et précis
2 Réponse 10 pièces sans dessin
ou dessin de 10 pièces mais avec une pièce de forme différente du modèle
ou 7 ou 8 pièces bien placées sur un dessin
1 Pavage avec les pièces positionnées sans rotation (6 pièces)
0 Incompréhension du problème : pièces superposées ou présence de plus d'une pièce non conforme ou réponse par calcul : 45 : 4 = 11

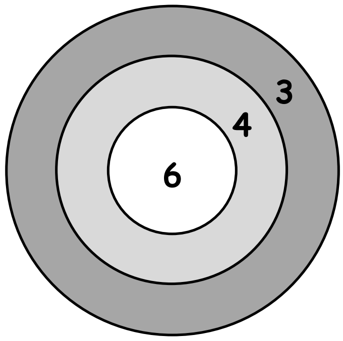
Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena, reprise du problème « Le défi », finale du 11e RMT

5. EN PLEIN DANS LA CIBLE (Cat. 3, 4, 5)

Marc a placé cette cible sur la porte de sa chambre.

Aujourd'hui, il lance une à une toutes ses fléchettes et atteint à chaque fois la cible (chaque fléchette dans la zone 3 vaut 3 points, dans la zone 4 vaut 4 point, dans la zone 6 vaut 6 points.



À la fin, la situation se présente ainsi :

- le nombre des fléchettes arrivées dans la zone qui vaut 4 points est égal au nombre des fléchettes arrivées dans la zone qui vaut 3 points,
- dans la zone qui vaut 6 points il y a 13 fléchettes,
- le total des points obtenus est un nombre compris entre 107 et 118.

Combien y a-t-il de fléchettes dans la cible ?
Combien de points Marc a-t-il obtenus exactement ?
Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver un nombre situé entre 107 et 118 qui est la somme de 13 termes « 6 » et d'autant de termes « 3 » que de termes « 4 » (c'est-à-dire d'un multiple de 7) dans un contexte de cible avec des zones à 3, 4 et 6 points.

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'impact de la flèche sur la cible (zone dans laquelle la flèche est arrivée) donne le nombre qu'il faudra utiliser pour obtenir le résultat.
- Tenir compte du fait que Marc atteint toujours la cible et que chaque flèche comptera pour le résultat final.
- Selon la 2e condition, le résultat obtenu avec les flèches lancées au centre est 78 (6×13) et comprendre que les autres points sont obtenus par un nombre égal de 3 et de 4 (même nombre de flèches).
- Procéder par essais, par exemple, l'hypothèse de 3 flèches dans chacune des zones 3 et 4, ce qui donne 99 points ($78 + 3 \times 3 + 3 \times 4$), trop peu. Essayer avec 4 flèches, ce qui donne 106 points ($78 + 4 \times 3 + 4 \times 4$), puis avec 5 flèches, ce qui donne 113 points ($78 + 5 \times 3 + 5 \times 4$), et voir que c'est la seule solution car avec 6 flèches par zone on obtiendrait 120 points ($78 + 6 \times 3 + 6 \times 4$), qui est un trop grand nombre. Marc a donc lancé 23 flèches ($13 + 5 + 5$).

Ou : se rendre compte qu'on cherche les multiples de 7 qui, additionnés à 78 donnent une somme comprise entre 107 et 118. Trouver que le multiple est le 5e (le 2e, le 3e et le 4e sont trop petits et le 6e et les suivants sont trop grand)

Conclure que $78 + 5 \times 7 = 113$ et que $13 + 5 \times 2 = 2$, le nombre de flèches.

Attribution des points

4 Réponse correcte aux deux questions (23 fléchettes, 113 points) avec explications claires de la procédure qui permet de se rendre compte de l'unicité de la solution

3 Réponse correcte aux deux questions (23 fléchettes, 113 points) sans explications

2 Réponse correcte « 113 points » avec explications claires de la procédure, mais sans répondre à la première question

ou réponse « 18 fléchettes (en oubliant de doubler les 5 fléchettes) et 113 points »

ou procédure correcte (prise en compte des deux contraintes : somme comprise entre 107 et 118 et même nombre de fléchettes dans les zones 3 et 4) mais avec une erreur de calcul

1 Début de raisonnement qui témoigne d'une compréhension de la situation

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Siena

6. DES CHIFFRES … ET ENCORE DES CHIFFRES (Cat. 4, 5, 6)

Jules a écrit un journal de 260 pages.

Pour numéroter les 13 premières pages (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13) il a écrit 17 chiffres : six fois le chiffre 1, deux fois le chiffre 2, deux fois le chiffre 3 et une fois chacun des autres chiffres 4, 5, 6, 7, 8, 9 et 0.

Combien de chiffres Jules a-t-il écrit pour numéroter toutes les pages de son journal, de la page 1 à la page 260 ?

Expliquez comment vous avez obtenu votre résultat.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique :

Dénombrer ou compter les chiffres utilisés pour écrire les nombres de 1 à 260

Analyse de la tâche

- Écrire la liste des nombres de 1 à 260 et comptabiliser ensuite le nombre de chiffres utilisés.

  Cette procédure qui est fastidieuse si elle est conduite par une seule personne peut être plus facilement menée à son terme si les élèves se répartissent le travail en scindant la plage des nombres de 1 à 260.

  Cette procédure qui permet d'entrer dans la résolution peut aussi être abandonnée en cours de route au profit de la procédure qui suit
- comptabiliser les nombres de 1 à 260 qui s'écrivent avec :

  1 chiffre : 9 (de 1 à 9)

  2 chiffres : 90 (de 10 à 99, c'est-à-dire 99 - 9)

  3 chiffres : 161 (de 100 à 260 c'est-à-dire 260 - 99)

  Calculer le nombre de chiffres utilisés : $9 + (90 \times 2) + (161 \times 3) = 9 + 180 + 483 = 672$

Ou : Comptabiliser par chiffres des unités : 260 ; par chiffres des dizaines : 260 - 9 = 251 et par chiffres des centaines 260 – 99 = 161, ce qui revient à 260 + 251 + 161 = 672

Attribution des points

4 Réponse correcte (672) avec explications claires (par exemple, à partir de la liste complète des nombres avec dénombrement des chiffres, ou calculs par plages de nombres à un chiffre, deux chiffres ou trois chiffres)

3 Réponse correcte avec des explications peu claires ou incomplètes

ou réponse erronée suite à une seule erreur de dénombrement ou de calcul, mais procédure correcte avec explications claires

2 Réponse correcte sans explication

ou réponse erronée suite à deux erreurs de dénombrement ou de calcul, mais procédure correcte avec explications claires

1 Début de recherche correcte

ou réponse 511 (oubli des chiffres des centaines)

0 Incompréhension du problème

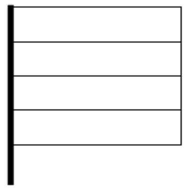
Niveaux : 4, 5, 6

Origine : Siena

7. DRAPEAU MULTICOLORE (Cat. 5, 6)

Pour la fête de l'école, chacune des 19 classes dessine un drapeau à quatre bandes horizontales.
Les élèves de chaque classe doivent colorier chaque bande selon les règles suivantes :

- chaque bande doit être d'une seule couleur : rouge, jaune ou bleu,
- pour chaque drapeau, il faut utiliser les trois couleurs,
- il ne faut pas colorier de la même couleur deux bandes qui se touchent.



Chaque classe pourra-t-elle avoir un drapeau différent de ceux de toutes les autres classes ? Dessinez les drapeaux qu'il est possible de réaliser.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

- Trouver les combinaisons de coloriage d'un drapeau de quatre bandes horizontales en trois couleurs, différentes pour des bandes contiguës.

Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes : chaque bande d'une seule couleur, trois couleurs exactement pour chaque drapeau, deux bandes qui se touchent ne peuvent pas avoir la même couleur.
- Constater que pour chaque drapeau deux bandes doivent avoir la même couleur, soit les bandes 1 et 3 soit les bandes 2 et 4, soit les bandes 1 et 4.
- Dessiner des drapeaux ou les schématiser avec des lettres (par exemple R, J, B) de manière non ordonnée puis comparer les dispositions obtenues, éliminer celles qui apparaissent plusieurs fois, jusqu'à épuisement des combinaisons (avec le risque d'oublis ou de doublons).
- Ou procéder d'une manière systématique. Voici par exemple une des organisations possibles (il y en a beaucoup d'autres, en arbres ou en tableaux) :

  pour la 1e ligne, trois possibilités : **R** ; J ; B ; pour la 2e ligne, deux choix : 6 combinaisons **RJ** ; **RB** ; JR ; … ; pour la 3e ligne il y a de nouveau deux choix : 12 combinaisons **RJB** ; **RJR** ; **RBR** ; **RBJ** ; JRJ ; … dont 6 ont deux couleurs, **RJR** ; **RBR** ; JRJ… et les 6 autres ont trois couleurs, **RJB** ; **RBJ** ; JRB ; JBR ; … ; les premières doivent obligatoirement être complétées par la troisième couleur, les secondes offrent encore chacune deux possibilités pour la quatrième ligne, ce qui conduit aux 18 (6 + 2 × 6) combinaisons possibles :

  avec le rouge en haut : **RJBR** ; **RJBJ** ; **RBJR** ; **RBJB** ; **RJRB** ; **RBRJ** ;

  avec le jaune en haut : JRBR ; JRBJ ; JBRJ ; JBRB ; JBJR ; JRJB ;

  avec le bleu en haut : BRJR ; BRJB ; BJRJ ; BJRB ; BRBJ ; BJBR.
- Répondre : les 19 classes ne pourront pas avoir des drapeaux tous différents.

Attribution des points

4 Réponse « non » avec la liste ou les dessins des 18 combinaisons correctes

3 Réponse « non » avec les possibilités trouvées où il manque un ou deux drapeaux (liste ou dessins où l'on peut voir 16 ou 17 combinaisons)

ou réponse « oui» avec les possibilités trouvées où il y a un ou deux doublons (liste ou dessins où l'on peut voir 19 ou 20 combinaisons)

ou les 18 combinaisons correctes mais avec l'oubli de la réponse « non »

2 Réponse « non » avec les possibilités trouvées où il manque trois ou quatre drapeaux (liste ou dessins où l'on peut voir 14 ou 15 combinaisons)

ou réponse « oui» avec les possibilités trouvées où il y a de trois à quatre doublons (liste ou dessins où l'on peut voir 21 ou 22 combinaisons)

ou liste ou dessin de 16 ou 17 combinaisons mais sans la réponse « non »

ou liste ou dessin de 19 ou 20 combinaisons, mais sans la réponse « oui »

1 De 6 à 13 combinaisons correctes, avec ou sans autre réponse

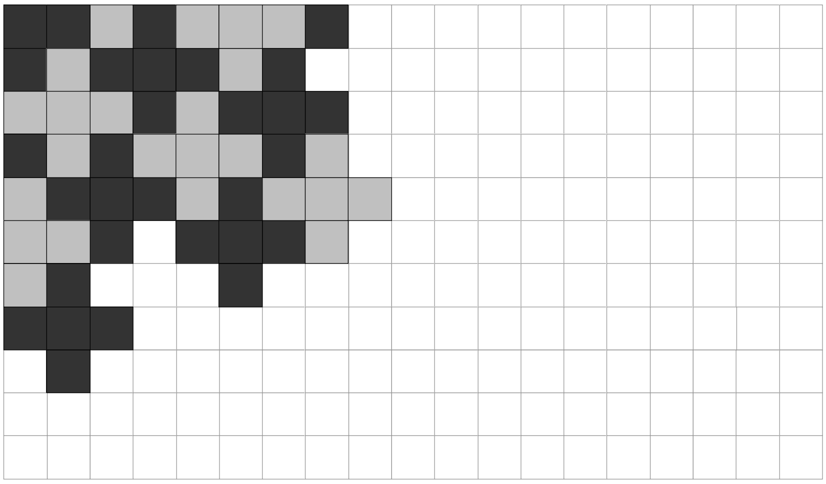
0 Moins de 6 combinaisons correctes avec ou sans « oui » ou « non »
ou seulement « non » ou incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Luxembourg + 17.F.04

8. PAVAGE DÉCORATIF (Cat. 5, 6)

Dans une vieille maison, on a trouvé sur le sol du salon une partie de l'ancien carrelage. Il était fait de carreaux gris et noirs, tous de la même taille, disposés de manière à former des croix grises ou noires (avec des croix incomplètes sur les bords). Le dessin montre le sol du salon avec la partie du carrelage qui a été retrouvée.



Le nouveau propriétaire a décidé de refaire le carrelage du salon, comme il était à l'origine.

Quand tout le carrelage sera refait, combien y aura-t-il de carreaux gris et combien de carreaux noirs ?

Expliquez comment vous avez fait pour trouver les nombres de carreaux de chaque couleur.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter sur un quadrillage un pavage composé de croix formées dans leur version complète de cinq carreaux, les croix étant de couleur grise ou de couleur noire. Compter pour chaque couleur le total de carreaux utilisés.

Analyse de la tâche

- Compléter le pavage en découvrant ses propriétés et régularités. Par exemple :
  - chaque croix est faite de cinq carreaux de la même couleur ;
  - chaque croix est entourée de quatre croix de l'autre couleur ;
  - deux croix voisines de la même couleur sont en contact par le sommet d'un carreau ;
  - les croix sont incomplètes en bordure du rectangle. Elles seront composées d'un, ou 3 ou 4 carreaux.

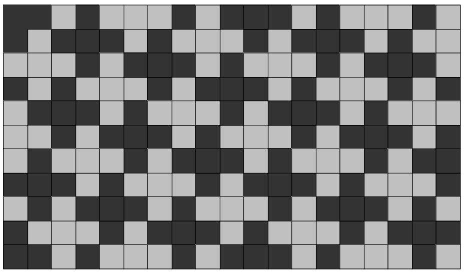
Ou, découper une croix qui sera ensuite utilisée comme gabarit pour dessiner les croix sur le quadrillage. (Cette dernière procédure diminue la difficulté de placement des carreaux en bordure du rectangle).

- Pour le dénombrement des carreaux, il y a de très nombreuses possibilités. Par exemple :

  Compter les croix entières de chaque couleur : 15 grises et 16 noires, pour un total de 75 carreaux gris et 80 noirs. Compter ensuite les carreaux qui ne composent pas une croix entière : 30 gris et 24 noirs ;

  Compter le nombre de carreaux de chaque couleur dans chaque ligne ou colonne et faire la somme pour chaque couleur, ou numéroter les carreaux d'une même couleur …

- Possibilité dans les deux cas de limiter le dénombrement à une couleur. Déterminer ensuite le nombre de carreaux dans le rectangle (19×11) et calculer la différence pour déterminer le nombre de carreaux de l'autre couleur ou, en complétant le motif, remarquer que les neuf premières colonnes correspondent aux neuf dernières pour limiter le dénombrement.



Attribution des points

4 Réponse correcte (105 gris et 104 noirs) avec dessin et explications (par exemple, on a compté les croix entières puis les autres carreaux, on a compté ligne par ligne, on a numéroté …)

3 Dessin exact avec explications ou calculs, mais erreur de dénombrement des carreaux d'une ou des deux couleurs ;
ou dessin exact avec explications ou calculs, mais seuls les carreaux composant des croix complètes ont été dénombrés (75 gris et 80 noirs)

2 Réponse correcte avec ou sans dessin, mais réponse sans explications ni calculs

1 Début de pavage correct (les croix complètes sont correctement dessinées)
ou réponse par le nombre correct de croix complètes de chaque couleur (15 gris et 16 noires)

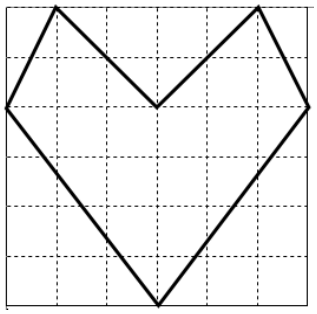
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Siena

9. LE CŒUR DE MARTINE (Cat. 5, 6)

Martine a fait un dessin en forme de cœur sur son cahier.



Elle a colorié le cœur en rouge et la partie qui reste du carré en bleu.

Quelle est la plus grande partie : celle coloriée en rouge ou celle coloriée en bleu ?
Expliquer comment vous avez fait pour trouver votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer les aires internes et externes d'un polygone dessiné sur une grille quadrillée de 6 × 6. Le polygone a un axe de symétrie et ses sommets sont sur des intersections du quadrillage.

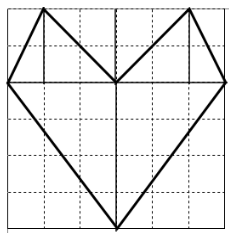
Analyse de la tâche

Pour la partie du haut (2 lignes) :

- Compter les carrée entiers, les demi-carrés (triangles rectangles isocèles) et les demi-rectangles de 1 × 2 facilement perceptibles. On obtient une surface intérieure correspondant à 6 carrés, comme pour la surface extérieure.

Pour la partie inférieure (4 lignes) :

- Compter les carrés entiers et pour chaque petit triangle de la partie intérieure, lui chercher un correspondant dans la partie extérieure. Conclure que les deux surfaces ont la même aire.
  Ou abandonner le comptage et décomposer la partie inférieure en quatre triangles égaux (demi-rectangles de 3 x 4). L'égalité des aires est immédiate.



Ou : décomposer la figure en triangles rectangles (voir dessin) et constater que pour chaque triangle rouge il y en a un bleu identique. De là en déduire que les superficies sont égales.
Cette comparaison peut se faire par découpage et superposition.

Ou : procéder au calcul des aires des deux parties après avoir décomposé la partie intérieure en trois triangles (un en bas de base 6 et hauteur 4 ; deux en haut de base 3 et hauteur 2). Possibilité d'utiliser comme unité de longueur le côté de carreau ou le centimètre. Conclure à l'égalité des aires.

Ou : calculer l'aire du carré puis celle de la partie extérieure (ou intérieure) puis par soustraction trouver celle de l'autre partie.

Attribution des points

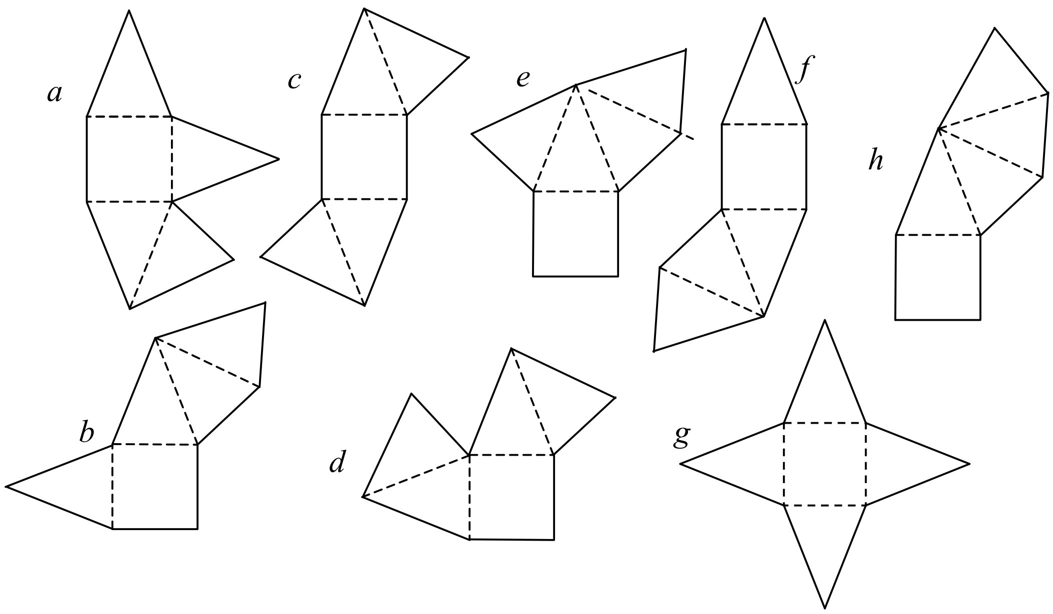
4 Réponse correcte (les deux parties sont de même grandeur) avec explications complètes
3 Réponse correcte avec explications incomplètes
2 Réponse correcte sans explications
ou réponse incorrecte en raison d'une erreur de comptage, de mesure ou de calcul
1 Début de raisonnement correct
0 Incompréhension ou aucune réponse

Niveaux : 5, 6

Origine : Parma

10. LES DESSINS DU GRAND-PÈRE (Cat. 6, 7)

Louise a trouvé ces huit dessins dans un vieux cahier de mathématiques de son grand-père.



Elle les observe attentivement et constate qu'ils sont tous formés d'un carré et de quatre triangles isocèles égaux.

Elle remarque aussi que si l'on découpait ces dessins et si on les pliait en suivant les pointillés, on obtiendrait dans certains cas une pyramide, mais pas dans les autres cas, parce que deux faces seraient l'une sur l'autre et il en manquerait une pour compléter la pyramide

Parmi ces huit dessins, quels sont ceux qui ne permettent pas de construire une pyramide ?

Coloriez en rouge les deux faces qui se retrouveraient l'une sur l'autre dans les dessins qui ne permettent pas de construire une pyramide.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

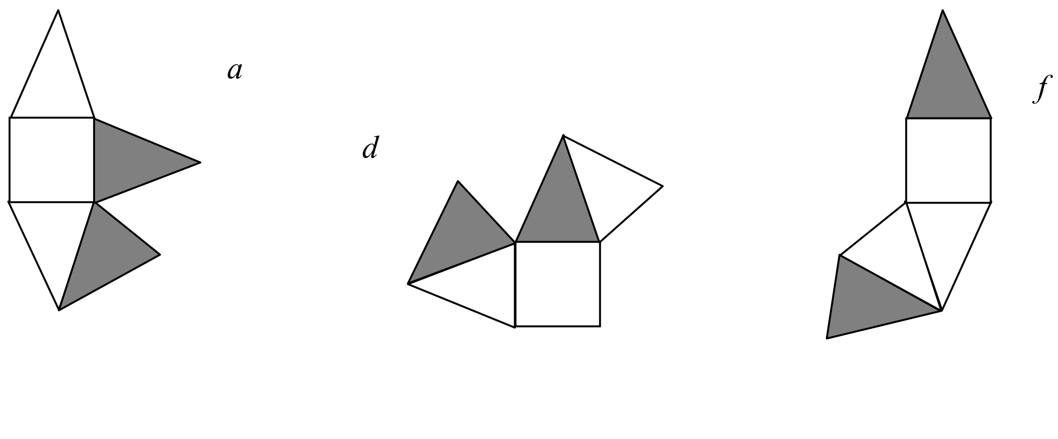
Reconnaître les patrons (développements) corrects d'une pyramide régulière à base carrée par visualisation dans l'espace ou découpage et déterminer ceux qui sont incorrects. Trouver les faces qui se superposent après la construction.

Analyse de la tâche

- Découper et plier effectivement les modèles pour s'apercevoir que *a, d* et *f* ne sont pas des patrons de pyramides mais que *b*, *c*, *e*, *h* le sont.

ou : imaginer les mouvements des faces dans l'espace pour arriver au même résultat.

Dans les deux cas, colorier les deux faces qui se superposent dans *a, d* et *f*.



Attribution des points

4 Solution correcte, découverte des trois figures *a, d. f,* avec les faces qui se superposent coloriées

3 Découverte des trois développements incorrects *a, d, f* et une seule erreur (ou oubli) dans le coloriage des faces

2 Découverte de deux seulement des trois développements incorrects, avec les faces qui se superposent coloriées

ou découverte des trois figures *a, d, f,* avec les faces indiquées mais avec un développement correct considéré comme faux

ou découverte des trois développements incorrects avec de 2 à 3 erreurs de coloriage ou oublis dans le coloriage des faces (par exemple seulement une des deux faces qui se superposent pour chaque dessin)

1 Un seul faux patron découvert avec coloriage correct

ou autres types de confusions ou erreurs, montrant toutefois une compréhension de la tâche ou des essais

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

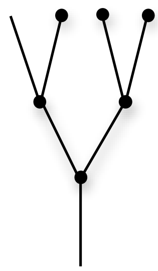
Origine : Riva del Garda + 17.I.13

11. BOULES ET TIGES (Cat. 6, 7, 8)

Luc a trouvé dans une boîte 100 boules d'acier et des aimants en forme de tige.

Il commence à construire un arbre avec une tige (le tronc) puis il continue, niveau par niveau, selon les règles suivantes :

- en haut de chaque tige, il fixe une boule ;
- sur chaque boule, il place deux tiges ;
- il place toutes les tiges d'un même niveau, et ensuite il fixe les boules sur ces tiges, avant de passer au niveau suivant.



La figure représente le début de la construction de l'arbre, lorsqu'il manque encore une boule pour que le troisième niveau soit complet.

A un certain moment, Luc s'arrête car il n'a plus de boules, alors qu'il lui reste encore des tiges.

A ce moment-là, combien de tiges Luc a-t-il utilisées pour son arbre ?

Et combien de tiges sont restées sans boule ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Dans la suite des sommes des premières puissances de 2 (positives et entières), trouver celles qui sont « directement » inférieure et supérieure à 100 (63 et 127) ; calculer la différence entre 100 et la plus grande (27), dans un contexte de construction d'arbre binaire.

Analyse de la tâche

- Comprendre la règle de construction de l'arbre et ajouter quelques branches pour mieux voir comment il se développe, comprendre que la construction de l'arbre se déroule niveau par niveau et qu'elle s'arrête dès qu'on a épuisé toutes les boules.
- Additionner le nombre de boules utilisées niveau par niveau jusqu'à $63 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32$, (parce que, au-delà, on dépasse 100). Le nombre de tiges utilisées suit la même règle : aux 63 boules précédentes correspondent 127 tiges : $1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64$.

  Sur les 64 tiges du dernier niveau, on ne pourra placer que les 37 ($100 – 63$) boules restantes. Il restera $64 – 37 = 27$ tiges sans boule.

Ou : faire un dessin de tous les niveaux sur lesquels on peut compter les 100 boules et les 127 tiges, dont les 27 dernières sans boules, tâche qui exige une très grande précision.

Attribution des points

4 Réponses correctes (127 tiges et 27 tiges sans boule) avec explications claires et correctes

3 Réponses correctes avec explications incomplètes (dessin imprécis, seulement les nombres d'objets par niveau …)
ou réponse 126 (oubli du tronc) et 27 tiges sans boule avec explications claires et correctes

2 Réponses correctes sans explication
ou une seule erreur dans les calculs ou le dessin ou le comptage
ou une seule réponse correcte (127 tiges mais le nombre de tiges sans boules incorrect ou non trouvé)

1 Début d'un raisonnement correct
ou réponse erronée « 128 tiges et 28 tiges sans boules » en calculant simplement les puissances de 2 sans faire la somme des différentes étapes

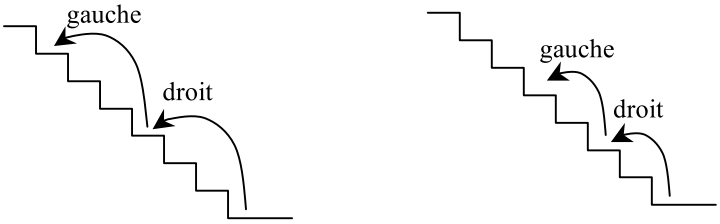
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Parma

12. L'ESCALIER (Cat. 6, 7, 8**)**

Stéphane et son amie Élise montent en courant un grand escalier. Stéphane monte les marches « trois par trois », pendant qu'Élise, elle, les monte « deux par deux ».



Stéphane Élise

Tous les deux commencent par le pied droit. Stéphane pose le pied gauche sur la dernière marche, alors qu'Élise pose le pied droit sur la dernière marche. Il y a 10 marches sur lesquelles, tous les deux ont posé le pied gauche.

De combien de marches est formé l'escalier ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer les multiples communs de 2 et de 3 (donc multiples de 6) puis les multiples de 12 en raison de l'alternance gauche/droite et trouver le premier multiple de 6 après le 10e multiple de 12.

Analyse de la tâche

- Faire des essais à l'aide d'un schéma ou tableau pour bien comprendre la situation.
- Observer que, puisque tous les deux réussissent à arriver en haut de l'escalier, ce dernier doit avoir un nombre de marches multiple de 3 et de 2, donc multiple de 6.
- Déduire que, puisque Stéphane pose le pied gauche toutes les 6 marches, alors qu'Élise le fera toutes les 4 marches, les deux enfants poseront le pied gauche sur les marches dont le numéro est un multiple de 12. Il faut comprendre ensuite qu'ils ont monté dix fois 12 marches, c'est à dire 120 et déterminer le premier multiple de six qui suit 120, c'est-à-dire 126.

Ou bien : noter les sauts de Stéphane et d'Élise en repérant les numéros des marches (les multiples de 12) sur lesquelles ils posent tous les deux le pied gauche; une fois arrivés à la dixième de ces marches (c'est à dire la 120e marche de l'escalier), se rendre compte qu'il faut encore ajouter 2 sauts pour Stéphane et 3 pour Élise (c'est à dire 6 marches), afin qu'ils arrivent respectivement sur le pied gauche et sur le pied droit.

Attribution des points

4 Réponse correcte (126) avec explications claires et complètes

3 Réponse correcte (126) avec explications peu claires ou incomplètes

2 Réponse correcte sans explications
ou réponse « 120 marches » avec une explication qui ne tient pas compte du fait qu'Élise doit arriver sur la dernière marche avec le pied droit

1 Début de raisonnement correct (par exemple schéma/tableau des 24 premières marches avec relevé du pied gauche/pied droit pour chacun)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Siena

13. L'EQUIPE D'ENRICO (Cat. 7, 8, 9, 10)

L'équipe de football d'Enrico a joué 24 matchs dans le championnat de cette année. Pour chaque match gagné, elle a obtenu trois points et pour chaque match nul un point. À la fin du championnat elle a eu 35 points en tout.

L'an dernier, l'équipe d'Enrico avait aussi joué 24 matchs. Elle en avait gagné le même nombre que cette année mais avec trois matchs nuls en moins. Cependant, pour chaque match gagné l'équipe n'obtenait que deux points. À la fin du championnat de l'an dernier, l'équipe d'Enrico a totalisé 24 points.

Combien de fois, l'équipe d'Enrico a gagné, fait match nul ou a perdu, cette année ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Comparer deux additions : 35 comme somme de 24 termes 3, 1 et 0, puis 24 comme somme de 24 termes 2, 1, 0 ; sachant que le nombre de termes 3 et le nombre de termes 2 sont les mêmes pour 35 et 24 et que le nombre de termes 1 a diminué de trois entre 35 et 24. (Dans un contexte de matchs d'un championnat de foot)

Analyse de la tâche

- Traduire toutes les données en relations numériques :
- Faire l'inventaire des manières d'obtenir 35 points, en les organisant par exemple de la manière suivante :

  11 matchs gagnés au maximum, 2 nuls, les autres perdus : $35 = 3 \times 11 + 2$, puis continuer en diminuant le nombre de matchs gagnés : $35 = 3 \times 10 + 5 = 3 \times 9 + 8 = \mathbf{3 \times 8 + 11}$ et $3 \times 6 + 17$,

  de même pour 24 points: $24 = 2 \times 12 = 2 \times 11 + 2 = 2 \times 10 + 4 = 2 \times 9 + 6 = \mathbf{2 \times 8 + 8} = 2 \times 7 + 10$ …

  et trouver que les deux possibilités avec le même nombre de victoires et trois nuls en moins sont $\mathbf{3 \times 8 + 11}$ et $\mathbf{2 \times 8 + 8}$.

Ou, observer qu'il y a 11 points de différence entre les deux championnats (35 – 24) dus aux trois matchs nuls en plus et au point en plus attribué à chaque match gagné cette année, (soit 8 fois un point). Par conséquent en retirant de 35, les points gagnés lors des 8 victoires, on obtient 11 matchs nuls.

Ou, par l'algèbre : (avec par exemple g comme nombre de matchs gagnés n comme nombre de matchs nuls, résoudre le système

$$3g + n = 35,$$
$$2g + (n - 3) = 24.$$

Attribution des points

4 Réponses correctes (8 matchs gagnés, 11 matchs nuls, 5 perdus) avec explications claires de la procédure suivie

3 Réponses correcte avec explications peu claires

2 Réponse correcte sans explications ou avec seulement une vérification
ou procédure correcte mais avec une erreur de calcul

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9,10

Origine : Siena

14. LE VILLAGE TOURISTIQUE (Cat. 7, 8, 9, 10)

La *Figure 1* représente la maquette d’un village touristique composé de neuf édifices (3 × 3).

La *Figure 2* représente le même village, sous forme d’une grille.

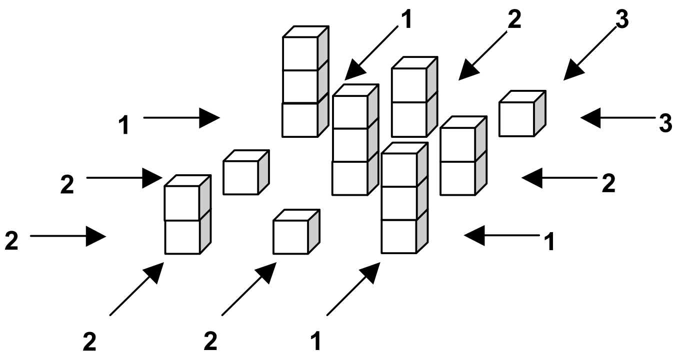


Figure 1

	1	**2**	**3**	
1	3	2	1	**3**
2	1	3	2	**2**
2	2	1	3	**1**
	2	**2**	**1**	

Figure 2

Les édifices ont un, deux, ou trois étages. Les édifices alignés sur une même ligne horizontale ou verticale ont tous des hauteurs différentes. Les nombres que vous voyez à l’extérieur de la grille indiquent le nombre d’édifices que l’on peut voir de ce point vue (attention : les moins hauts sont cachés par les plus hauts). Les nombres à l’intérieur de la grille indiquent la hauteur de chaque édifice.

Imaginez maintenant un village de vingt-cinq édifices (5 × 5) de un, deux, trois, quatre ou cinq étages, construits avec les mêmes règles, représentés par la grille ci-dessous.

Les nombres d’édifices que l’on peut voir des différents points de vue sont donnés à l’extérieur de la grille. On a aussi noté que la hauteur de l’édifice de la première colonne et de la troisième ligne est de 2 étages.

	3	**2**	**1**	**2**	**4**	
3						**3**
2						**2**
2	2					**2**
3						**1**
1						**5**
	1	**2**	**3**	**3**	**2**	

Complétez la grille en écrivant dans chaque case la hauteur de son édifice.

ANALISE A PRIORI

Tâche mathématique

Compléter une grille de 5 × 5, de type “Gratte ciel” (Edifices de 1, 2, 3, 4, 5 étages, dans chaque ligne et chaque colonne, selon l’indication du nombre visible de ces édifices depuis chaque extrémité de ligne ou de colonne)

Analyse de la tâche

- Commencer par placer les édifices les plus hauts, c’est-à-dire le 5 en AF, EH, BL, CG et, (par exclusion), en DI.
- Compléter la ligne A, la colonne L et la ligne C
- Compléter la ligne E en observant que l’édifice le plus haut est au centre et les plus petits sur les côtés
- Compléter la ligne D en observant que le 4 doit être en DF
- Compléter, par exclusion, la ligne B

La procédure décrite n’est évidemment pas l’unique possible, mais on obtient dans tous les cas le schéma suivant :

		F	G	H	I	L	
		3	**2**	**1**	**2**	**4**	
E	**3**	1	3	5	4	2	**3**
D	**2**	4	1	2	5	3	**2**
C	**2**	2	5	1	3	4	**2**
B	**3**	3	2	4	1	5	**1**
A	**1**	5	4	3	2	1	**5**
		1	**2**	**3**	**3**	**2**	

Attribution des points

4 Grille complète et correcte

3 Une ou deux erreurs dans la grille (ex. deux nombres égaux dans la même ligne ou colonne ou non respect du nombre d’édifices visibles)

2 Trois ou quatre erreurs dans la grille

1 Début de raisonnement : avec au moins 5 nombres placés (par exemple ceux de la ligne A)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Milano

15. NUMÉROS PAIRS À LA LOTERIE (Cat. 7, 8, 9, 10)

Sept amis, 4 filles et 3 garçons, ont acheté chacun un billet de loterie.

Ils observent que :

- chacun d'eux a reçu un billet portant un nombre pair, différent de 0,
- pour les billets des filles, la somme des nombres est 50,
- pour les billets des garçons, la somme des nombres est 30,
- la somme des 3 plus grands nombres est 50,
- la somme des trois plus petits nombres est 18.

Indiquez quels peuvent être les nombres possibles sur chacun des billets, et précisez s'ils ont été achetés par un garçon ou par une fille.

Indiquez toutes les solutions possibles et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Déterminer 7 nombres pairs différents, répartis en deux groupes : 4 dont la somme est 50 et 3 de somme 30, dont la somme des trois plus grands est 50 et celle des trois plus petits est 18

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il est nécessaire de prendre en compte toutes les conditions :
  les numéros des sept amis sont pairs, et sont tous différents puisque ce sont des nombres associés à des billets d'une loterie ;
- En représentant les 7 nombres dans l'ordre croissant et en sachant que la somme des trois premiers est 18 et celle des trois derniers est 50, le nombre central se déduit facilement comme différence entre la somme totale des nombres 80 (50 + 30) et celle des six autres nombres (les trois précédents et les trois suivants) 68 (50 + 18) : 12
- Il n'y a qu'une combinaison de trois nombres pairs différents supérieurs à 12 dont la somme est 50 : 14, 16, 20 et deux combinaisons pour trois nombres pairs différents inférieurs à 12 dont la somme est 18 : 2, 6, 10 et 4, 6, 8.
- Il n'y a alors que deux possibilités pour l'ensemble des sept nombres :
  2, 6, 10, 12, 14, 16, 20 et 4, 6, 8, 12, 14, 16, 20.
- Pour la première possibilité, il y a deux répartitions en quatre nombres, de somme 50, pour les filles et trois pour les garçons, de somme 30 :
  (1) filles : 2, 12, 16, 20, garçons : 6, 10, 14
  (2) filles : 6, 10, 14, 20, garçons : 2, 12, 16
  et pour la seconde possibilité, il y a trois répartitions :
  (3) filles : 6, 8, 16, 20, garçons : 4, 12, 14
  (4) filles : 4, 12, 14, 20, garçons : 6, 8, 16
  (5) filles : 8, 12, 14, 16, garçons : 4, 6, 20

Attribution des points:

4 Les 5 possibilités correctes (voir ci-dessus) avec des explications montrant qu'il n'existe pas d'autres solutions possibles

3 Les 5 possibilités correctes, avec des explications insuffisantes
ou 4 possibilités correctes avec explications

2 Deux ou trois possibilités correctes

1 Une possibilité correcte, ou début de raisonnement correct (seulement les deux ensembles possibles de 7 nombres, sans les attribuer à fille ou garçon)

0 Incompréhension du problème

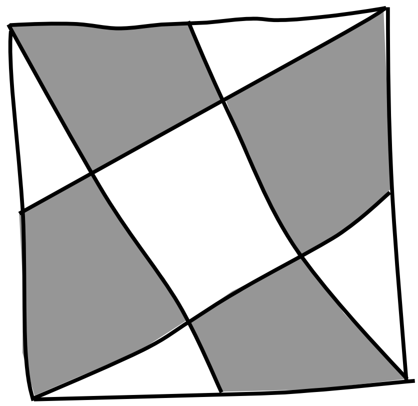
Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Siena, reprise de « Quelle famille ! » 12e RMT I

16. LA TERRASSE DE JOSEPH (Cat. 7, 8, 9, 10)

Joseph a une terrasse carrée de 10 m de côté. Il désire peindre le sol en blanc et en gris.

Il fait un croquis pour son projet en traçant un carré qui représente la terrasse puis, à l'intérieur, quatre segments de droites qui vont de chacun des quatre sommets au milieu d'un côté opposé. Il colorie en gris quatre parties et laisse les cinq autres en blanc.



Joseph observe son croquis fait à main levée.

Il se demande de quelle forme seront ses différentes parties et si l'aire des parties blanches sera égale à celle des parties grises.

Calculez l'aire totale des parties blanches et celle des parties grises, en donnant le détail de votre démarche et de vos calculs.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Un carré de 10 m de côté est partagé en neuf parties par quatre segments joignant l'un des quatre sommets à l'un des quatre milieux d'un côté opposé. Déterminer l'aire des parties de chaque couleur, après en avoir perçu la forme.

Analyse de la tâche

- Observer le dessin, constater que la figure se décompose en neuf parties et se rendre compte qu'il faut déterminer la forme de chacune des parties avant d'entrer dans la phase du calcul des aires.

  Cette détermination peut se faire visuellement mais doit être confirmée par un dessin précis (avec des instruments de dessin géométrique ou sur un papier quadrillé) ou faire l'objet d'une argumentation, déduite des propriétés du carré et de ses côtés partagés en deux parties égales par les points milieux.

  Les neuf parties (*figure 1)* sont un carré central, quatre trapèzes rectangles égaux et quatre triangles rectangles égaux. On distingue aussi quatre « grands » triangles (*figure 2*, composés d'un trapèze et de deux « petits » triangles), quatre triangles « moyens » (*figure 3*, composés d'un trapèze et d'un « petit » triangle). Les « grands » triangles sont des quarts du grand carré, (mesure des côtés de l'angle droit 5 et 10 cm, aire 25 cm^2, hypoténuse $\sqrt{125}$ ou $5\sqrt{5}$ cm). Tous les triangles de la figure sont semblables (mêmes angles, et rapport 2 entre les mesures des côtés de l'angle droit) …

  Pour le calcul des aires, il y a de très nombreuses procédures possibles.
- Par mesure des longueurs et calcul des aires sur un dessin précis à l'échelle, par exemple sur un carré de 10 cm de côté.
- Par « quadrillage » (construction précise sur papier quadrillé d'un carré de 10 unités de côté, *figure 4*) : le comptage des carrés dans un petit triangle qui est la moitié d'un rectangle de 2 × 5 permet d'obtenir l'aire : 5 (en unités du quadrillage) puis l'aire de toutes les autres figures.
- Par « pavage » du carré en petits triangles. A cet effet il faut remarquer que les quatre petits triangles (dont l'hypoténuse mesure 5 cm) peuvent être reportés sur tout le pourtour du carré (*figure 5*), puis que les rectangles sont composés de deux de ces triangles (*figure 6*) et finalement que le carré central se décompose en quatre de ces triangles (*figure 7*). Les aires des différentes parties peuvent s'exprimer alors en « petits triangles » (12 pour les parties grises et 8 pour les parties blanches) ou en m^2 après conversion des unités (60 et 40).

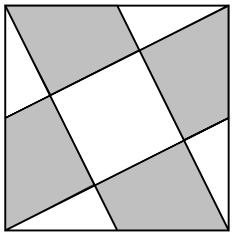


figure 1

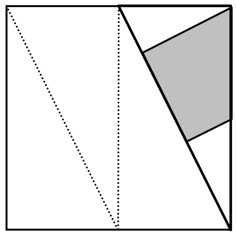


figure 2

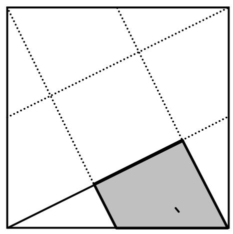


figure 3

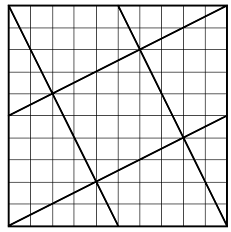


figure 4

- Par décomposition et recomposition en observant par exemple qu'un trapèze et un triangle peuvent être assemblés pour former un carré équivalent au carré central (éventuellement par une rotation des triangles, voir *figure 8*) puis en déduire que la terrasse carrée peut être décomposée en 5 parties équivalentes au carré central, de 100 : 5 = 20 (m^2), puis que l'aire d'un triangle est 5 m^2 et que celle d'un trapèze est 15 m^2 pour arriver finalement à l'aire de la partie grise 4 × 15 = 60, en m^2, et celle de la partie blanche, 40 m^2.

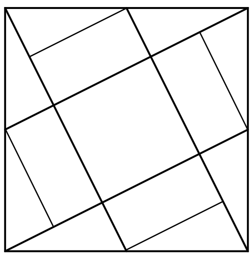


figure 5

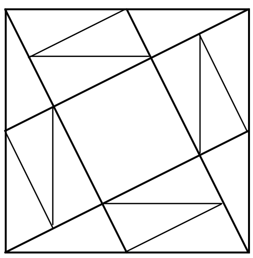


figure 6

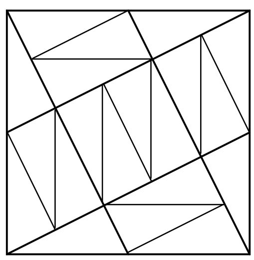


figure 7

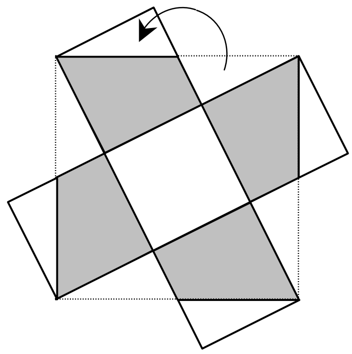


figure 8

- Par voie algébrique, en désignant par x et $2x$ les mesures des côtés de l'angle droit d'un petit triangle, dont l'hypoténuse mesure 5 (en m), en tirer $x^2 + 4x^2 = 25$, (Pythagore), puis $5x^2 = 25$ et finalement $x^2 = 5$ (en m^2), qui est aussi l'aire du triangle $(x \bullet 2x)/2 = x^2$.

Attribution des points

4 Réponse correcte complète (grises : 60 m^2 et blanches : 40 m^2) avec explications complètes des opérations effectuées et de la manière dont ont été reconnues les figures (construction précise, carré, triangles et trapèzes nommés, ou autre mention explicite de la réflexion sur les formes…)

3 Réponse correcte complète (60 m^2 et 40 m^2) avec détail de la recherche des aires (par pavage, décomposition, algèbre, mesure sur le dessin, quadrillage …) mais sans aucune mention de la réflexion sur les figures

2 Réponse correcte complète (60 m^2 et 40 m^2) sans explication
ou réponse proche de 60 m^2 et 40 m^2, où les calculs d'aires sont effectués à partir de mesures approximatives sur un dessin
ou réponse complète et bien expliquées, mais fausse à cause d'une erreur de calcul

1 Début de raisonnement correct par exemple calcul de l'aire de l'une des parties seulement (20 m^2 pour le carré, 5 m^2 pour un petit triangle) avec explications
ou seulement un dessin précis

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Riva del Garda

17. JOUER A *FREE CELL* (Cat. 8, 9,10)

Dans le jeu de *Free Cell*, le programme indique à la fin de chaque partie le nombre des parties jouées, celui de celles qui ont été gagnées et le pourcentage des victoires.

Antoine a joué 12 parties et en a gagné 6. Le pourcentage de victoires est de 50%. Il joue encore 3 autres parties et les gagne. Le programme l'informe que son pourcentage de victoires est de 60%.

Antoine arrive à 75% en jouant encore 9 parties toutes gagnantes.

Antoine est impatient d'arriver à 80% et puis à 90% sans perdre une seule partie.

Combien de parties devra-t-il encore gagner, sans en perdre, pour arriver à 80% puis à 90% ?

Expliquez comment vous avec trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

En considérant le rapport « parties gagnées / parties jouées », trouver le nombre de parties gagnées qui permet de passer de 75% à 80% puis à 90%.

Analyse de la tâche

- Comprendre que les pourcentages indiqués se réfèrent au rapport entre parties gagnées et parties jouées et que, cas après cas, les nombres des unes et des autres peuvent être déduits des rapports donnés.
- Comprendre que si Antoine gagne une partie, il augmente d'une unité le nombre des parties gagnées et celui des parties jouées et que la différence reste constante.
- Vérifier que lorsqu'Antoine a joué et gagné 3 autres parties il a 9 parties gagnées sur 15 partie jouées, ce qui correspond bien à 9/15 = 3/5 = 60/100 ou 60%. Vérifier ensuite qu'après 9 nouvelles parties gagnées, il atteint le rapport 18 parties gagnées sur 24 parties jouées ce qui correspond à 18/24 = 3/4 = 75/100 ou 75%.
- Pour déterminer le nombre de parties à gagner afin d'arriver à 80% on peut procéder par essais organisés en partant de la dernière proportion donnée par le texte 18/24 = 75/100, en ajoutant chaque fois 1 au nombre de parties jouées et gagnées et en écrivant et en calculant à chaque fois les rapports : (18 + 1)/(24 + 1) puis 20/26, 21/27, … jusqu'à 24/30 = 0,8 = 80%, et continuer ensuite jusqu'à 54/60 = 0,9 = 90%.

Ou, par voie algébrique : désigner par x le nombre de parties à gagner afin d'arriver à 80% et écrire le rapport : $(18 + x)/(24 + x) = 80/100$ qui conduit à $x = 6$, c'est-à-dire qu'à ce moment il a 24 parties gagnées sur 30 parties jouées. De la même manière on trouve qu'il atteint les 90% après avoir joué et gagné y parties : $(24 + y)/(30 + y) = 90/100$, qui conduit à $y = 30$.

- Conclure dans un cas comme dans l'autre, qu'Antoine devra encore jouer et gagner 6 parties pour arriver aux 80% et 30 autres parties pour arriver aux 90%.

Attribution des points

4 Réponse correcte (6 parties pour le 80% et 30 autres parties pour le 90%) avec explications claires et détaillées

3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes
ou seulement le nombre total de parties gagnées pour 80% (24) et pour 90% (54)

2 Réponse correcte sans explications
ou une seule des deux réponses correctes avec explications

1 Une seule des deux réponses sans explications
ou début de raisonnement correct

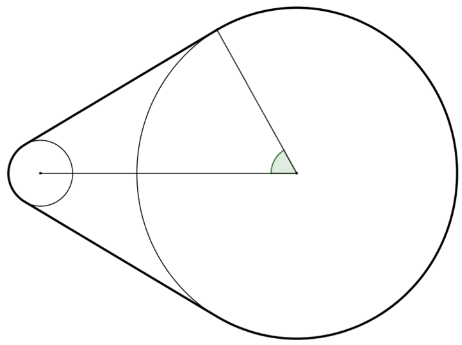
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Sassari

18. LA COURROIE DE LUC (Cat. 9, 10)

Luc a trouvé dans son grenier le mécanisme représenté ici.



Il est formé de deux roues reliées par une courroie de transmission non élastique. Les rayons des deux roues mesurent respectivement 15 cm et 3 cm, alors que l'angle dessiné sur la figure mesure 60°.

Luc doit remplacer la courroie qui est usée.

Il dispose d'une nouvelle courroie de 110 cm de longueur.

Pensez-vous que la nouvelle courroie sera assez longue ?

Justifiez votre réponse.

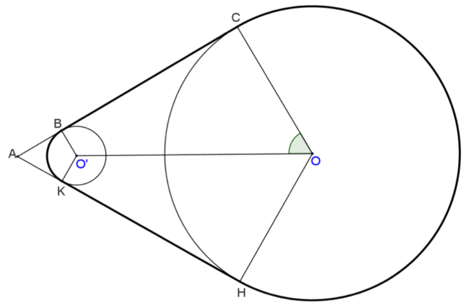
ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Trouver la longueur du périmètre d'une figure composée de deux arcs de cercles de 3 et 15 cm de rayons et de deux segments tangents aux deux cercles, dans le contexte de deux roues reliées par une courroie de transmission. (On a dessiné sur la figure l'angle de 60 degrés formé par le segment reliant les centres des deux cercles et le rayon du grand cercle menant au point de contact d'un des segments tangents).

Analyse de la tâche

- Comprendre que la courroie est tendue entre les deux roues et donc que les segments de courroie qui relient les cercles y sont tangents. Ainsi, la partie de la courroie qui reste se superpose parfaitement à deux des quatre arcs déterminés par les points de contact.
- Reconnaître la symétrie de la figure par rapport à la droite qui joint les centres des deux cercles.
- Prolonger les deux tangentes et la droite reliant les deux centres O et O' jusqu'à leur point d'intersection A. Dessiner dans les deux disques, les rayons reliant les centres aux points de contact B, C, K, H.



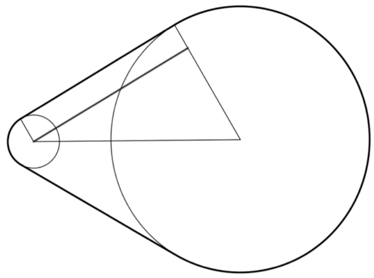
- Se rendre compte que les triangles ACO et ABO' sont rectangles en C et en B respectivement (en un point d'un cercle, la tangente et le rayon sont perpendiculaires). Comprendre que l'angle AO'B est égal à l'angle AOC (angles à côtés parallèles), mesurant 60° et conclure que les triangles ACO et ABO' sont la moitié de deux triangles équilatéraux de côtés respectivement égaux à 30 cm et 6 cm. La longueur du segment [BC] est égale à la différence entre AC et AB, hauteurs des deux triangles équilatéraux : $15\sqrt{3} - 3\sqrt{3} = 12\sqrt{3}$.
- Comprendre que, puisque l'angle BO'K mesure 120°, et est par conséquent le tiers de 360°, l'arc BK sur lequel s'appuie la courroie, est aussi le tiers de la circonférence du petit cercle : $6\pi/3 = 2\pi$.

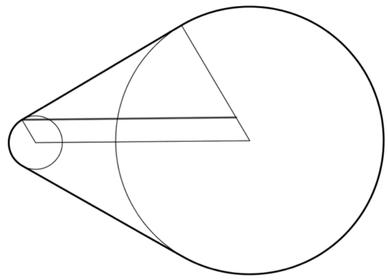
  Dans le plus grand cercle, en revanche, l'arc CH sur lequel s'appuie la courroie est le plus grand et correspond aux deux tiers de 360°, donc le grand arc CH mesure les deux tiers de la circonférence du cercle: $30\pi \times 2/3 = 20\pi$.

- Trouver la longueur de la courroie en effectuant la somme des valeurs obtenues : $12\sqrt{3} \times 2 + 2\ \pi + 20\ \pi$ en centimètres, soit une somme (environ 110,6) supérieure à 110 cm.

Ou : observer que l'angle de 60° est 1/3 d'un angle plat ; par conséquent, les arcs correspondants sont 1/3 des demi-cercles, donc $3\pi/3 = \pi$ dans le petit cercle et $15\pi/3 = 5\pi$ dans le grande cercle pour lequel l'arc qui est recouvert par la courroie est le double, donc 10π.

- Calculer le segment tangent en raisonnant sur l'une des deux figures :





Dans les deux cas, après avoir tracé le rayon du petit cercle qui va du centre au point de contact, la figure est décomposée en un parallélogramme et un triangle rectangle, demi triangle équilatéral de côté 24 = 2(15–3) cm. En appliquant la formule donnant la hauteur d'un triangle équilatéral ou le théorème de Pythagore, trouver que le segment tangent aux deux cercles mesure $12\sqrt{3}$ cm. Dans les deux figures on obtient deux triangles rectangles, demi triangles équilatéraux, auxquels on applique les règles précédentes pour trouver les hauteurs respectives : $(15–3)\sqrt{3}$.

Donc la mesure de la longueur de la courroie est $22\ \pi + 24\sqrt{3} = 2(12\sqrt{3} + 11\pi)$.

- Arrondir π et $\sqrt{3}$ à la deuxième décimale pour calculer la mesure approximative de la courroie $2(12 \times 1{,}73 + 11\times 3{,}14) = 110{,}6$ cm et conclure que la courroie dont Luc dispose est trop courte.

Attribution des points

4 Réponse correcte (non, la courroie n'est pas assez longue) avec le détail des calculs et avec toutes les explications géométriques correctes

3 Réponse correcte avec le détail des calculs donnant la longueur $22\pi + 24\sqrt{3}$, mais avec des explications incomplètes

2 Procédure correcte, mais avec une erreur de calcul qui peut aussi conduire à la réponse « oui »
ou réponse incomplète : 22π pour les arcs ou $24\sqrt{3}$ pour les segments, sans effectuer les calculs
ou toutes les explications mais les calculs ne sont par terminés

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Parma et Gruppo 0^0

19. LA CUEILLETTE DES POMMES (Cat. 9, 10)

A la ferme de Monsieur Jean, les pommes ont été récoltées et rangées dans 99 cagettes.

Pour la cueillette, Jean a été aidé par sa femme Thérèse et par son fils Lucas.

Jean a rempli huit cagettes par heure, Thérèse six et Lucas seulement quatre.

Jean a travaillé tout le temps, Thérèse la moitié du temps de Jean, et Lucas seulement la moitié du temps de Thérèse.

Pendant combien de temps Jean a-t-il travaillé ?

Exprimez ce temps en heures et minutes et expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Tâche mathématique

Calculer la durée d'un travail (de 99 u) fait à trois personnes avec chacune une vitesse (8, 6, 4 u/h), et des durées différentes (1 ; ½ ; ¼), dans un contexte de récolte de pommes.

Analyse de la tâche

- Percevoir et distinguer les trois grandeurs en jeu et leurs unités : quantité de travail, 99 en « caisses à remplir » ; durée du travail, en « heures » : temps total (question), durées de Jean, Thérèse et Lucas et leur rapports 1, 1/2 et 1/4 ; vitesse de remplissage 8, 6 et 4 en « caisses par heure ».
- Comprendre que la durée totale de la récolte correspond à la durée du travail de Jean (Jean a travaillé tout le temps) et que les durées de T et L se situent dans l'intervalle où Jean travaille.
- Pour se familiariser avec ces grandeurs et unités, on peut fixer une durée, et déterminer la quantité de caisses correspondante. Si, par exemple, Jean travaille 4 heures il remplit 32 caisses, durant ce temps Thérèse travaille 2 heures et remplit 12 caisses, Lucas travaille 1 heure et remplit 4 caisses, ensemble ils remplissent 48 caisses en 4 heures.
- Construire un tableau de proportionnalité entre des durées et le nombre de cagettes remplies pour aboutir à la solution : 8 heures un quart :

durées (en heures) :	4	8	2	1	1/2	1/4	…	8 + 1/4
caisses remplies :	48	96	24	12	6	3	…	99

  Les correspondances ci-dessus utilisent « par approximations successives » les propriétés de la proportionnalité ; on pourrait passer plus rapidement à l'unité (1 ; 12) ou directement à (t ; 99) par la recherche de la « quatrième proportionnelle ».

  (On pourrait aussi ajouter des lignes avec les durées et le travail de Thérèse et Lucas, ou utiliser les écritures décimales pour les demi-heures et les quarts d'heure.)

Ou, déterminer la vitesse de travail des trois personnes ensemble $8 + 6 \times 1/2 + 4 \times 1/4 = 8 + 3 + 1 = 12$ (caisses par heure de travail commun), puis résoudre l'équation $99 = 12 \times t$, qui devient $t = 99/12 = 33/4 = 8,25$ ou 8 heures et 15 minutes.

Attribution des points :

4 Réponse correcte (8 heures et 15 minutes) avec explications complètes

3 Réponse correcte avec explications incomplètes

2 Réponse approchée du type « plus de 8 heures et moins de 9 heures »

1 Début de raisonnement correct (par exemple, tentatives bien gérées sans arriver à la réponse)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Siena