

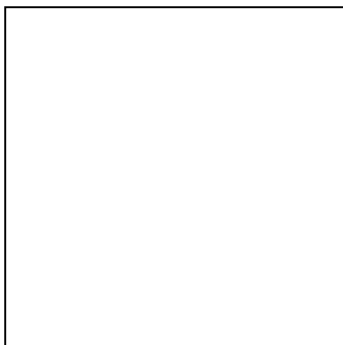
Titre	Catégories	Thème	Origine
1. Le gâteau carré	3 4	géométrie	1.F.8
2. La varicelle	3 4	arithmétique (nombres naturels)	LU
3. Chemin d'allumettes	3 4 5	combinatoire	1.F.10
4. Le tapis de Mme Doudouche	3 4 5	géométrie, mesure, arithmétique	lg, fj
5. Fenêtres éclairées	3 4 5	logique	SI
6. Les bonbons	4 5 6	arithmétique, combinatoire	PR
7. Tom et Lou	5 6	arithmétique (nombres naturels)	LU
8. Le verger de tante Marie	5 6 7	arithmétique	AO
9. Que de parallélogrammes	5 6 7	géométrie	LU
10. Parts de tartes	6 7 8	arithmétique (fractions)	BB
11. Pas si simple	6 7 8	arithmétique (nombres décimaux)	BB
12. Quitte ou Triple	6 7 8 9	arithmétique	LO
13. L'âne Cadichon	7 8 9 10	arithmétique, logique	RV
14. Les accros du boulot	7 8 9 10	arithmétique	LU
15. Peson à ressort	8 9 10	fonctions	FC
16. Nouvelle voiture	8 9 10	arithmétique (pourcentages)	CB
17. Boules de Pétanque	9 10	volumes	FC
18. Après 2013	9 10	somme d'une suite de fractions	fj
19. La crise	10	décroissance exponentielle	FC

## 1. LE GATEAU CARRE (Cat 3, 4)

Quatre enfants se retrouvent pour manger un gâteau carré.

- Chaque enfant veut avoir la même quantité de gâteau.
- Deux enfants veulent une part de gâteau de forme carrée.
- Les deux autres enfants veulent une part de gâteau de forme triangulaire.

**Dessinez sur ce carré, un partage qui peut contenter chaque enfant :**



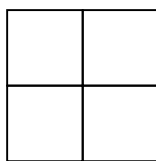
### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

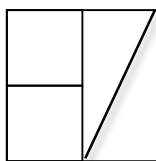
- Partager un carré en 4 parts de même aire : 2 carrés et 2 triangles

#### Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes du problème : partager le carré en 4 parts de même aire avec 2 carrés et 2 triangles.
- Stratégie par essais de carrés découpés puis de triangles (probablement rectangles).
- Stratégie déductive :
  - Déduire des données que chaque part représente  $1/4$  du carré initial ;
  - Comprendre que pour partager le carré initial en 4 parts carrées identiques, il faut partager le côté du carré en 2 segments de même longueur ; (*figure 1*)
  - Comprendre qu'il faut garder 2 de ces carrés et transformer l'espace occupé par les 2 autres carrés en 2 triangles ;
  - Comprendre que 2 carrés adjacents peuvent être partagés en 2 triangles rectangles identiques (donc de même aire que chaque carré) : la justification n'est pas demandée (mais un contrôle par découpage et superposition est possible), puis faire les tracés correspondants (voir *exemple avec la figure 2*).



*figure 1*



*figure 2*

- Comprendre que chaque enfant doit avoir l'équivalent de 1 carré. Partager un carré en deux demi-carrés et rechercher comment il est possible d'obtenir un triangle en assemblant deux demi-carrés (assemblage par un côté de l'angle droit). On obtient un triangle rectangle isocèle qui a pour côté de l'angle droit une diagonale d'un carré.

Chercher ensuite comment il est possible de loger 2 de ces triangles dans un carré  $2 \times 2$ .

#### Attribution des points

- 4 Solution correcte avec tracés précis et complet
- 3 Solution complète avec tracés ambigus (par exemple les triangles sont apparents, mais pas clairement délimités, figure surchargée par des tracés inutiles...)
- 2 Le partage en 4 carrés est réalisé, mais les 2 triangles ne sont pas trouvés ou faux
- 1 Essai avec des carrés ou des triangles identiques, mais recherche non aboutie ou partage en 2 triangles rectangles (demi-carrés), puis blocage
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 3, 4

**Origine :** 1.F.8

## 2. LA VARICELLE (Cat. 3, 4)

Dans la classe d'Anna, il y a quatre filles de plus que de garçons.

Aujourd'hui, en raison d'une épidémie de varicelle, la moitié des garçons et la moitié des filles sont malades et ne sont pas venus à l'école.

Il ne reste que 14 élèves en classe.

**Combien de filles et combien de garçons sont malades ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

- Trouver 2 nombres, dont la somme est égale à 14 et dont la différence des doubles est égale à 4.

#### Analyse de la tâche

- Comprendre les contraintes arithmétiques du problème (voir tâche mathématique).
- Les stratégies suivantes sont plus rapides ou plus économiques si les élèves se rendent compte que les nombres totaux de filles et garçons sont pairs (pour qu'on puisse en prendre la moitié)
- Stratégie par essais et ajustements de nombres respectant les contraintes énoncées successivement : essai (hypothèse) respectant les 4 élèves de différence, calcul de la moitié de chaque nombre (malades ou présents), addition des restes et vérification pour savoir si cette somme est 14.
- Stratégie par inventaires des cas, par exemple en commençant l'énumération à 2 pour garçons et donc à 6 ( $2 + 4$ ) pour les filles et vérification de la 2<sup>e</sup> condition (cette organisation peut apparaître, mais pas sous forme de tableau), par exemple :

Garçons	Filles	Moitié des garçons	Moitié des filles	Somme des moitiés
2	6	1	3	<b>4</b>
4	8	2	4	<b>6</b>
6	10	3	5	<b>8</b>
...	...	...	...	...

L'inventaire peut s'arrêter lorsque la somme 14 est atteinte en remarquant que la suite des sommes est croissante.

- Procéder de même, mais en partant des élèves malades (ou présents) et en considérant qu'il y a 2 filles de plus que de garçons.
- Comprendre que dans chacune des deux moitiés d'élèves, le nombre de filles dépasse de 2 le nombre garçons, puis qu'en soustrayant 2 de 14 on obtient deux fois le nombre de garçons présents. Par conséquent le calcul  $(14 - 2) : 2 = 6$  donne le nombre garçons présents bleus et  $6 + 2 = 8$  le nombre de filles présentes.
- Raisonner en partant du nombre initial d'élèves ( $28 = 14 \times 2$ ). En soustrayant les 4 filles de plus de plus, on obtient le double du nombre de garçons ( $24 = 28 - 4$ ). En déduire le nombre de garçons ( $12 = 24 : 2$ ) et celui des filles ( $16 = 12 + 4$ ), puis le nombre garçons et de filles malades (la moitié des nombres précédents). Ce raisonnement peut aussi conduire à la suite de calculs :  $(28 - 4) : 2 = 12$ ,  $12 + 4 = 16$ ,  $12 : 2 = 6$ ,  $16 : 2 = 8$ .

#### Attribution des points

- 4 Les deux réponses correctes (8 filles malades, 6 garçons malades) avec explications claires et détaillées
- 3 Une des deux réponses correctes avec explications claires et détaillées et l'autre absente ou erronée (suite à une erreur de calcul)  
ou les deux réponses correctes avec explication absente ou incomplète
- 2 Procédure correcte, mais réponses erronées dues à une erreur de calcul  
Réponses respectant les quantités totales d'élèves (16 filles et 12 garçons)
- 1 Début de recherche cohérente  
ou réponses du type "9 filles et 5 garçons" (total = 14 et écart = 4)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 3, 4

**Origine :** d'après Luxembourg (problème Tom et Lou)

### 3. CHEMIN D'ALLUMETTES (Cat. 3, 4, 5)

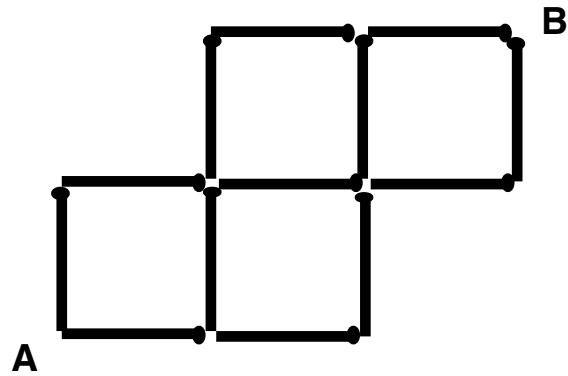
Trois enfants on fait un dessin avec des allumettes.

Ils cherchent les chemins les plus courts pour aller de A à B en imaginant qu'ils suivent les allumettes.

Anatole dit : *Il y a cinq chemins différents.*

Berthe lui répond : *J'en ai trouvé sept, deux de plus que toi, et il n'y en a pas d'autres.*

Zoé n'est pas d'accord : *Vous êtes nuls, il y a dix chemins différents.*



**L'un des trois enfants a-t-il raison ?**

**Expliquez pourquoi et montrez bien comment vous avez fait pour répondre.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

- Trouver tous les chemins qui peuvent être tracés sur une portion de quadrillage en se déplaçant uniquement vers le haut ou vers la droite.

##### Analyse de la tâche

- Se rendre compte que, vu les avis divergents, l'enjeu du problème est de déterminer le nombre de chemins différents, après avoir constaté que les chemins les plus courts sont constitués de 5 allumettes : 3 → et 2 ↑
- Comprendre les contraintes du problème et leur conséquence : un chemin de 5 allumettes ne peut être réalisé qu'en se déplaçant vers la droite ou vers le haut.
- Stratégie par tracé effectif de chemins, sans organisation au départ, puis avec une organisation progressive en essayant de trouver des chemins différents de ceux déjà obtenus. Il faut relever ici que les huit chemins, de couleurs différentes, sur un même dessin sont absolument illisibles et que c'est aux élèves de penser à tracer les chemins sur plusieurs dessins.
- Stratégie consistant à noter sur chaque extrémité, à partir de A, le nombre de chemins qui y mènent et, lorsqu'il y a intersection, de calculer la somme des deux chemins qui y mènent.

	2	<b>5</b>	<b>8 (B)</b>
1	<b>2</b>	<b>3</b>	3
0 (A)	1	1	

Ou : changer de cadre en utilisant un codage du type *h* (vers le haut) et *d* (vers la droite) et chercher à produire toutes les séquences de 5 lettres compatibles avec la portion de quadrillage représentée par les allumettes. La recherche de toutes les séquences peut être organisée ou non. Une organisation du type arbre peut être envisagée (avec  $2h$  et  $3d$ ) ou simplement la recherche des 10 arrangements de trois "*d*" et deux "*h*" en éliminant ceux qui ne respectent pas les contraintes liées au dessin par exemple trois *d* de suite ou deux *h* de suite pour commencer.

*ddhdh ddhhd dhddh dhdhd dhhdh hdddh hddhd hdhdd*

Dans tous les cas, terminer en dénombrant les chemins pour pouvoir affirmer qu'aucun des trois enfants a raison

##### Attribution des points

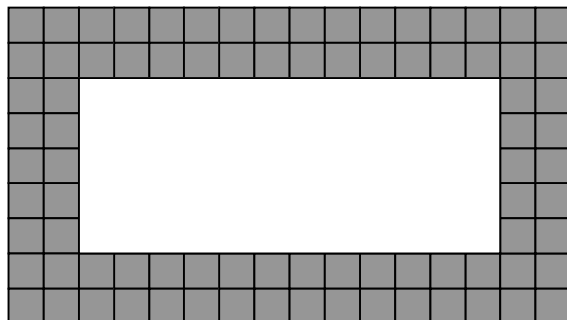
- 4 Réponse correcte (les trois enfants ont tort car il y a 8 chemins) avec tracés bien distinguables ou représentations par des suites de symboles
- 3 Réponse correcte (les trois enfants ont tort car il y a 8 chemins) mais tracés peu lisibles, (tous sur le même dessin) ou 8 tracés explicites, réponse « les trois enfants ont tort » non formulée
- 2 L'un des enfants a raison (7 ou 10 tracés) ou les trois ont tort avec 6, 7 chemins tracés de façon explicite ou plus de 8 chemins dénombrés, mais au moins 6 chemins tracés respectant les contraintes de l'énoncé (erreur dans le dénombrement dû à des tracés superposés)
- 1 Réponse avec 4 ou 5 tracés
- 0 Incompréhension du problème ou pas plus de 3 chemins tracés

**Niveaux :** 3, 4, 5

**Origine :** 1F10

#### 4. LE TAPIS DE MME DOUDOUCHE (Cat. 3, 4, 5)

Madame Doudouche a un beau tapis dans sa salle de bain, avec deux rangs de carrés gris sur les bords et une partie centrale blanche. Voici un dessin de son tapis:



Elle aimerait s'acheter un nouveau tapis.

Son nouveau tapis doit avoir la même longueur que celui-ci.

Mais la largeur de la partie blanche du nouveau tapis doit être le double de la largeur de la partie blanche du premier tapis.

Elle souhaite que son nouveau tapis possède aussi deux rangs de carrés gris sur le bord, comme sur le premier tapis.

**Combien y aura-t-il de carrés gris sur le bord de son nouveau tapis.**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Un rectangle donné étant entouré d'une double bande de petits carrés, trouver combien de petits carrés composent la double bande qui entoure un rectangle de même longueur que le premier et de largeur double.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre que la partie blanche est doublée seulement dans le sens de la largeur.
- Une première stratégie consiste à construire ou imaginer le nouveau rectangle et à trouver une méthode de dénombrement des carrés gris.
  - Pour cela, après avoir observé le dessin, déterminer que la partie blanche du nouveau tapis doit avoir deux fois la largeur de l'autre, mais la même longueur et donc que la partie blanche du nouveau tapis est un rectangle de 12 x 10 (soit 120 carrés) et que le nouveau tapis est un rectangle de 16 x 14 (soit 224 carrés)
- Pour déterminer le nombre de carrés du bord, il est possible d'utiliser :
  - une procédure de dénombrement par comptage de tous les carrés gris sur un dessin ;
  - une procédure de dénombrement des carrés gris en imaginant par exemple le nouveau tapis entouré d'une première bande grise fixée à la partie blanche composée de  $12 + 12 + 10 + 10 + 4$  carrés (en référence au «périmètre»), puis d'une deuxième bande composée de  $14 + 14 + 12 + 12 + 4$  carrés pour un total de 104 carrés ;
- Une deuxième stratégie consiste à dénombrer le nombre de carrés gris du tapis initial (mêmes procédures que ci-dessus, ce qui donne 84 carrés) et à dénombrer les carrés gris ajoutés dans la « transformation » du tapis initial en tapis final, les carrés gris étant ajoutés uniquement sur chacune des largeurs, soit 10 carrés (2 fois 5) pour chaque largeur, donc au total 20 carrés gris de plus que sur le tapis initial, soit 104 carrés ( $84 + 20 = 104$ ).

##### Attribution des points

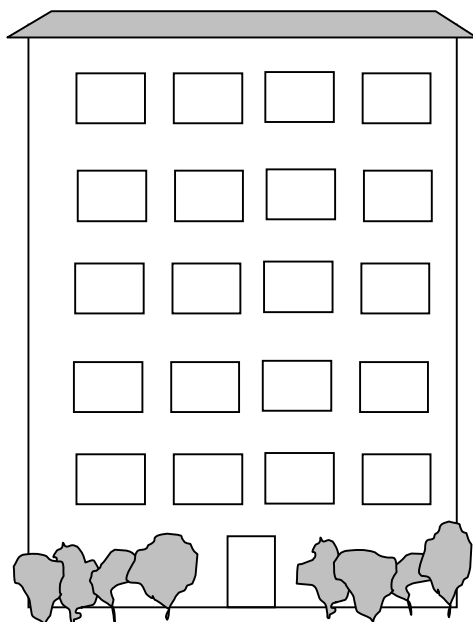
- 4 Réponse correcte (104 carrés gris) avec une explication claire et complète
- 3 Réponse correcte, avec une explication incomplète
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou réponse fautive due à une erreur de comptage ou de calcul
- 1 Début de raisonnement qui montre la compréhension du problème
- 0 Incompréhension du problème (par exemple, un nouveau tapis "double" de l'ensemble du tapis initial)

**Niveaux:** 3, 4, 5

**Origine :** fj et lg

### 5. FENETRES ECLAIREES (Cat 3, 4, 5)

C'est le soir. Marie est dans sa chambre et regarde la façade de l'immeuble d'en face.  
Ce dessin montre ce que voit Marie : un immeuble de cinq étages avec beaucoup de fenêtres.  
Certaines fenêtres sont éclairées et d'autres non.



Marie observe que :

- au premier étage, il y a trois fenêtres éclairées,
- il y a aussi trois fenêtres éclairées au quatrième étage,
- dans la colonne de gauche pour deux fenêtres qui se suivent, l'une est éclairée, l'autre non,
- dans la colonne de droite, il y a deux fenêtres éclairées,
- au cinquième étage, il y a une seule fenêtre éclairée,
- au troisième étage, toutes les fenêtres sont éclairées,
- en tout, il y a treize fenêtres éclairées.

**Coloriez en jaune, dans le dessin de l'immeuble les fenêtres éclairées que voit Marie.**

**Dites comment vous avez fait pour reconnaître les fenêtres éclairées.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Reconstruction d'une répartition des cases d'une grille de 5 lignes et 4 colonnes en deux états (éclairé ou non), par une chaîne de déductions, à partir de sept informations sur les nombres de cases d'un des deux états par lignes ou par colonnes.

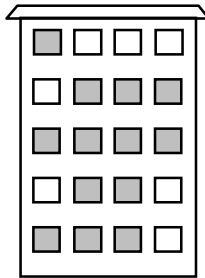
##### Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il n'y a qu'une seule des 7 informations données qui permet de déterminer l'état des fenêtres de manière univoque et que les autres offrent plusieurs possibilités.
- Commencer par l'information contenue dans le 6<sup>e</sup> point qui permet de colorier en jaune toutes les fenêtres du 3<sup>e</sup> étage. Puis, selon le 3<sup>e</sup> point, comprendre que la 1<sup>ere</sup> fenêtre à gauche du premier et du cinquième étage seront aussi éclairées. De là il est possible, en utilisant les différentes informations de suivre plusieurs chemins différents pour arriver à la solution.

Par exemple, selon le 2<sup>e</sup> point (3 fenêtres éclairées au 4<sup>e</sup>) colorier en jaune toutes les fenêtres du 4<sup>e</sup> à l'exception de la 1<sup>ere</sup> qui est sombre.

Puis selon le 4<sup>e</sup> point, déduire que les fenêtres non-jaunes de la 1<sup>ere</sup> colonne à droite restent sombres et selon le 1<sup>er</sup> point déduire qu'il faut colorier en jaune les 2 fenêtres centrales du 1<sup>er</sup> étage.

Finalement avec le 7<sup>e</sup> point (qui indique qu'il y a 13 fenêtres éclairées) on doit aussi colorier en jaune les fenêtres centrales du 2<sup>e</sup> étage.

**Attribution des points**

- 4 Coloriage correct et bien décrit (par exemple l'ordre dans lequel les fenêtres éclairées ont été découvertes : celle du troisième étage, puis celles de la colonne de gauche, ...)
- 3 Coloriage correct avec explications insuffisantes ou manquantes
- 2 11 fenêtres sont coloriées correctement (sans tenir compte qu'il y a 13 fenêtres éclairées)
- 1 Début de coloriage correct (au moins celles du troisième étage et de la première colonne à gauche)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 3, 4, 5

**Origine :** Siena

**6. LES BONBONS** (Cat. 4, 5, 6)

Anne, Bea et Charles veulent se partager les bonbons contenus dans un sac.

Ils décident que chacun d'eux va lancer un dé et prendre dans le sac autant de bonbons qu'il y a de points sur le dé.

Après que chaque enfant a lancé le dé deux fois, il y a 10 bonbons en moins dans le sac.

C'est Charles qui a le plus de bonbons.

**A ce moment-là combien de bonbons chaque enfant peut-il avoir ?**

**Indiquez toutes les possibilités et expliquez votre raisonnement.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver, parmi les décompositions de 10 en somme de 3 nombres entiers supérieurs ou égaux à 2, celles où l'un des nombres est plus grand que les deux autres.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que la somme des bonbons gagnés par les trois enfants est de 10.
- Observer que chaque enfant a eu au moins deux bonbons parce que, à chaque lancer, chacun obtient au moins un point.
- Dans le cas où l'on part de la relation « C'est Charles qui a eu le plus de bonbons » on peut limiter la recherche en éliminant les répartitions où Charles n'aurait eu que 2 ou 3 bonbons, après plusieurs essais ou par déduction :  
avec 4 bonbons à Charles, il reste 6 bonbons pour les deux filles : 3 et 3  
avec 5 bonbons à Charles, il reste 5 bonbons pour les deux filles : 3 et 2 ou 2 et 3  
avec 6 bonbons à Charles, il reste 4 bonbons pour les deux filles : 2 et 2  
avec 7 bonbons à Charles, il reste 3 bonbons pour les deux filles, ce qui est impossible
- Dans le cas où l'on cherche l'inventaire de toutes les répartitions, on peut l'établir par essais successifs et éliminations des doublons ou, en considérant que chaque enfant ne peut pas avoir plus de 6 bonbons (les 2 autres en ayant chacun au moins 2), écrire les 15 décompositions de 10 en sommes de trois termes compris entre 2 et 6 :  
Anne    **2**    **2**    2    2    2    **3**    **3**    3    3    4    4    4    5    5    6  
Béa    **2**    **3**    4    5    6    **2**    **3**    4    5    2    3    4    2    3    2  
Charles **6**    **5**    4    3    2    **5**    **4**    3    2    4    3    2    3    2    2  
et choisir les quatre qui conviennent (en gras ci-dessus)

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte : les quatre possibilités (C 6, B 2, A 2 ; C 5, B 3, A 2 ; C 5, B 2, A 3 ; C 4, B 3, A 3 ) avec une procédure explicite
- 3 Les quatre possibilités sans explications  
ou trois des quatre possibilité, mais avec des explications claires
- 2 Trois des quatre possibilités, sans explications  
ou trois des quatre possibilités (un oubli) et une solution ne respectant pas les contraintes  
ou deux des quatre possibilités avec explications
- 1 Une ou deux des quatre possibilités sans explication
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 4, 5, 6

**Origine :** Parme

**7. TOM ET LOU** (Cat. 5, 6)

Tom joue avec des jetons rouges et des jetons bleus.

Il a 12 jetons rouges de plus que de jetons bleus.

Sa sœur Lou prend la moitié des jetons rouges et la moitié des jetons bleus.

Tom compte les jetons qui restent et en trouve 78.

**Combien de jetons rouges et combien de jetons bleus Lou a-t-elle pris ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

- Trouver 2 nombres, dont la somme est égale à 78 et dont la différence des doubles est égale à 12.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre les contraintes du problème : le nombre de jetons pris par Lou et égal au nombre de jetons restants comptés par Tom, la différence des 2 nombres est égale à 12, la somme des moitiés des 2 nombres est égale à 78.
- Les stratégies suivantes sont plus rapides ou plus économiques si les élèves se rendent compte que le nombre de chaque sorte de jetons doit être pair (pour que Lou puisse en prendre la moitié)
- Stratégie par essais et ajustements de nombres respectant les contraintes énoncées successivement : essai (hypothèse) respectant les 12 jetons de différence, calcul de la moitié de chaque nombre (pris par Lou ou qui restent), addition des restes et vérification pour savoir si cette somme est 78.
- Stratégie par inventaires des cas, par exemple en commençant l'énumération à 2 pour les jetons bleus et donc à 14 (2 + 12) pour les jetons rouges et vérification de la 2<sup>e</sup> condition (cette organisation peut apparaître, mais sans doute pas sous forme de tableau, par exemple :

Jetons bleus	Jetons rouges	Moitié des bleus	Moitié des rouges	Somme des moitiés
2	14	1	7	<b>8</b>
4	16	2	8	<b>10</b>
6	18	3	9	12
...	...	...	...	...

L'inventaire peut s'arrêter lorsque la somme 78 est atteinte en remarquant que la suite des sommes est croissante.

- Procéder de même, mais en partant des jetons enlevés (ou restants) et en considérant qu'il y a 6 jetons restants rouges de plus que de jetons restants bleus.
- Comprendre que dans chacune des deux moitiés de jetons, le nombre de jetons rouges dépasse de 6 le nombre de jetons bleus, puis qu'en soustrayant 6 de 78 on obtient le double des jetons bleus. Par conséquent le calcul  $(78-6) : 2 = 36$  donne le nombre de jetons bleus et  $36 + 6 = 42$  le nombre de jetons rouges.
- Raisonner en partant du nombre initial de jetons ( $156 = 78 \times 2$ ). En soustrayant les 12 jetons rouges de plus, on obtient le double du nombre de jetons bleus ( $144 = 156-12$ ). En déduire le nombre de jetons bleus ( $72 = 144 : 2$ ) et celui des jetons rouges ( $84 = 72 + 12$ ), puis le nombre de jetons pris par Lou (la moitié des nombres précédents), ce raisonnement peut aussi conduire à la suite de calculs :  $(156 - 12) : 2 = 72$ ,  $72 + 12 = 84$ ,  $72 : 2 = 36$ ,  $84 : 2 = 42$

**Attribution des points**

- 4 Les deux réponses correctes (36 bleus, 42 rouges) avec explications claires et détaillées
- 3 Une des deux réponses correctes avec explications claires et détaillées et l'autre absente ou erronée (suite à une erreur de calcul)  
ou les deux réponses correctes avec explications absentes ou incomplètes
- 2 Procédure correcte, mais réponses erronées dues à une erreur de calcul  
ou réponse respectant les quantités totales de jetons (72 bleus et 84 rouges)
- 1 Début de recherche cohérente  
ou réponses du type « 45 rouges et 33 bleus » (total = 78 et écart = 12)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 5, 6

**Origine :** Luxembourg

**8. LE VERGER DE TANTE MARIE** (Cat. 5, 6, 7)

Tante Marie a planté 21 arbres fruitiers dans son verger : des pommiers, des pruniers, des abricotiers et des cerisiers. Il y a au moins 2 arbres de chaque sorte.

Comme elle aime beaucoup les prunes, le nombre de pruniers est le plus grand. C'est même le double du nombre de pommiers.

Le nombre des abricotiers est le double du nombre des cerisiers.

**Combien peut-il y avoir de pruniers dans le verger de tante Marie ?**

**Trouvez toutes les réponses possibles. Expliquez comment vous avez trouvé.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

- Arithmétique : décomposition de 21 en une somme de quatre termes supérieurs à 1, en deux couples dont un terme est le double de l'autre

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il y a quatre nombres à trouver supérieurs ou égaux à 2, dont la somme est 21, formant deux couples de nombres dont l'un des deux termes est le double de l'autre.
- Comprendre que toutes les fois que l'on fait un essai avec un couple de nombres dont un terme est le double de l'autre on peut soustraire la somme de ces deux nombres de 21 et tenter de décomposer la différence obtenue en deux nombres dont l'un est double de l'autre.

Par essais et vérifications, il n'y a finalement que 4 couples à envisager après avoir éliminé (2 ; 1) et les couples dont la somme est supérieure ou égale à 21 comme (14 ; 7), ... :

(4 ; 2) donne une différence de 15 et un nouveau couple (10 ; 5)

(6 ; 3), différence de 12, nouveau couple (8 ; 4)

(8 ; 4) différence de 9, nouveau couple (6 ; 3)

(10 ; 5), différence de 6, nouveau couple (4 ; 2)

(12 ; 6) donne une différence de 3 et un nouveau couple (2 ; 1) à éliminer

- Tenir compte que les pruniers sont les arbres les plus nombreux pour arriver à la conclusion qu'il y a deux solutions pour les pruniers et les pommiers : (10 ; 5) et (8 ; 4) conduisant respectivement aux nombres d'abricotiers et de cerisiers : (4 ; 2) et (6 ; 3).
- Donner enfin les deux solutions : 10 pruniers et 8 pruniers.

Ou, puisque le nombre de pruniers est le double du nombre de pommiers, le total de ces types d'arbres est un multiple de trois. Il en est de même pour le nombre d'abricotiers et de cerisiers. La somme de ces deux multiples de 3 doit être égale à 21. Les multiples de 3 inférieurs à 21 sont : 3 ; 6 ; 9 ; 12 ; 15 et 18. Par conséquent, les paires de nombres à considérer sont 3 (1 + 2) et 18 (12 + 6) ; 6 (2 + 4) et 15 (10 + 5) ; 9 (6 + 3) et 12 (4 + 8). La première paire n'est pas acceptable car il doit y avoir au moins deux arbres de chaque type.

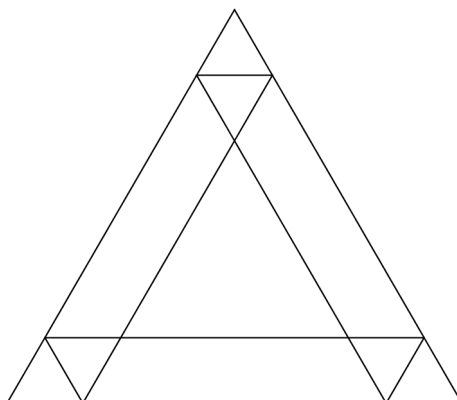
**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte avec les deux possibilités (10 ou 8 pruniers), avec explications claires des étapes de la recherche (détail des couples, choix, ...) ou schéma avec vérification des contraintes ou autre forme de vérification complète
- 3 Réponse correcte avec les deux possibilités, mais la procédure n'est pas donnée ou pas clairement explicitée ou avec une vérification partielle ou une seule possibilité bien expliquée (mais sans vérification)
- 2 Les deux possibilités sans aucune explication ni vérification ou une possibilité avec seulement une vérification
- 1 une possibilité sans explication ni vérification ou début de recherche compatible (réponses qui respectent au moins deux conditions)
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 5, 6, 7

**Origine :** Val d'Aoste

## 9. QUE DE PARALLELOGRAMMES (Cat 5, 6, 7)



Tous les triangles que l'on peut voir dans cette figure sont équilatéraux.

**Combien peut-on voir, en tout, de parallélogrammes dans cette figure ?**

**Décrivez ou indiquez les parallélogrammes trouvés.**

### ANALYSE A PRIORI

#### Tâche mathématique

Reconnaissance et comptage de parallélogrammes dans une figure

#### Analyse de la tâche

- Savoir reconnaître des parallélogrammes dans la figure en tenant compte du caractère régulier de la figure pour identifier les parallélogrammes identiques ;
- S'organiser pour ne pas oublier de parallélogrammes, ne pas comptabiliser deux fois le même.
- Exploiter le fait que dans un parallélogramme les côtés opposés sont parallèles.

Choisir deux paires de côtés parallèles afin de former un quadrilatère qui sera forcément un parallélogramme.

- Considérer qu'un losange est un parallélogramme

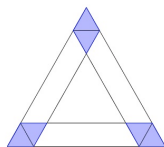
Il y a évidemment de nombreuses façons d'organiser l'inventaire, avec de nombreux risques de confusions ou d'oublis :

- nommer tous les « sommets » de la figure (ou les segments) et désigner les parallélogrammes par ces sommets (ou ces segments), ce qui aboutit à une notation lourde et longue, difficile à contrôler,
- utiliser des couleurs, ce qui ne permet plus de distinguer clairement les différentes figures,
- travailler par types de parallélogrammes d'une autre manière que ci-dessus, en tenant compte par exemple des transformations du triangle équilatéral ...

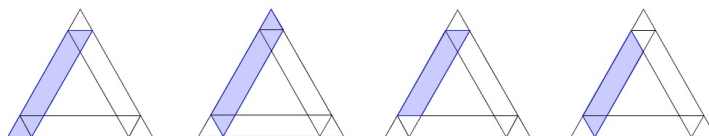
La tâche principale est précisément de choisir la représentation la plus efficace.

On aboutit à :

- 3 parallélogrammes qui sont aussi des losanges (1 famille de parallélogrammes)



- 12 parallélogrammes (qui ne sont pas des losanges), à savoir  
3 familles de 4 parallélogrammes, l'une à gauche comme sur la figure ci-dessous, une autre à droite et une en bas.



Il y a en tout  $3 + 12 = 15$  parallélogrammes.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (15) avec descriptions complètes (dessin ou autres désignations)
- 3 Réponse correcte (15) avec description peu « lisibles » (par exemple, par des couleurs sur un même dessin ou autres descriptions qui ne désignent pas tous les parallélogrammes)
- 2 Réponse (15) sans aucune description  
ou réponse (13 ou 14) avec descriptions (un ou deux oubliés)  
ou réponse erronée (12) avec oubli des 3 parallélogrammes losanges, avec descriptions  
ou plus de 15, avec présence d'autres figures non correctes (exemple : trapèze non parallélogrammes)
- 1 de 4 à 11 parallélogrammes différents
- 0 Incompréhension du problème ou moins de 4 parallélogrammes.

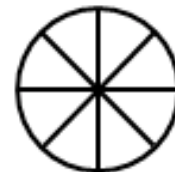
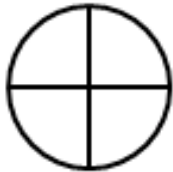
**Niveaux :** 5, 6, 7

**Origine :** Luxembourg

**10. LES PARTS DE TARTES** (Cat. 6, 7, 8)

Huit amis ont commandé six tartes pour le goûter. Le pâtissier a livré deux tartes aux fraises, deux tartes aux pommes et deux tartes aux kiwis. Toutes les tartes ont la même taille, mais les tartes aux fraises sont déjà coupées en quatre, les tartes aux pommes sont coupées en six et les tartes aux kiwis sont coupées en huit.

Ils se mettent d'accord pour que chacun mange la même quantité de tarte, sans avoir à couper d'autres parts. Chacun veut aussi avoir deux sortes de tartes. Comme les amis sont très gourmands, ils vont tout manger.



tartes aux fraises

tartes aux pommes

tartes aux kiwis

**Comment les huit amis peuvent-ils se répartir les parts de tartes ?**

**Donnez toutes les possibilités que vous avez obtenues et expliquez votre raisonnement.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver toutes les manières de répartir 8 quarts, 12 sixièmes et 16 huitièmes en 8 parts équivalentes, chacune constituée de deux types de fractions.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il faut répartir les tartes en 8 portions égales en prenant, pour chaque portion, des parts dans deux tartes.
- Raisonnement utilisant le calcul sur les fractions :
- Les 6 tartes étant entièrement consommées, chacun aura mangé  $\frac{6}{8}$  de tarte.
- Il faut donc obtenir  $\frac{6}{8}$  en additionnant soit des quarts et des sixièmes, soit des quarts et des huitièmes, soit des sixièmes et des huitièmes.
- Le raisonnement le plus simple consiste à chercher à compléter une ou plusieurs parts de chaque tarte pour obtenir des portions de  $\frac{6}{8}$  (ou de  $\frac{3}{4}$ ) de tarte.
  - Compléter  $\frac{1}{4}$  (égal à  $\frac{2}{8}$ ) par  $\frac{4}{8}$  (ou  $\frac{1}{2}$ ). On peut avoir alors :  $\frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{6}$  ou  $\frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{8}$ .
  - Compléter  $2 \times \frac{1}{4}$  (égal à  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{4}{8}$ ) par  $2 \times \frac{1}{8}$ . Donc  $2 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{8}$ .
  - Compléter  $\frac{1}{6}$  ou  $\frac{2}{6}$  par des huitièmes pour avoir  $\frac{6}{8}$  n'est pas possible.
  - Compléter  $\frac{3}{6}$  (égal à  $\frac{1}{2}$ ) par des huitièmes est possible :  $3 \times \frac{1}{6} + 2 \times \frac{1}{8}$ .
- On peut donc obtenir  $\frac{6}{8}$  de tarte de quatre manières différentes en tenant compte que chacun ne prend que deux sortes de tartes :

	Tarte aux fraises	Tarte aux pommes	Tarte aux kiwis
Portion A	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	
Portion B	$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
Portion C	$\frac{1}{4} + \frac{1}{4}$		$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$
Portion D		$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$	$\frac{1}{8} + \frac{1}{8}$

- Les 5 répartitions possibles entre les 8 enfants résultent des combinaisons de ces 4 portions :
  - répartition 1 : 4 personnes avec A ; 4 personnes avec B
  - répartition 2 : 3 personnes avec A ; 3 personnes avec B ; 1 personne avec C ; 1 personne avec D

répartition 3 : 2 personnes avec C ; 2 personnes avec B ; 2 personnes avec A ; 2 personnes avec D

répartition 4 : 1 personne avec A ; 1 personne avec B ; 3 personnes avec C ; 3 personnes avec D

répartition 5 : 4 personnes avec C ; 4 personnes avec D

Ou : procéder par essais plus ou moins organisés, à partir d'un découpage de toutes les parts de tartes. Cette stratégie peut permettre de trouver une ou deux répartitions, mais sans doute pas les cinq possibles.

**Attribution des points**

- 4 Au moins trois répartitions exactes avec explications correcte et aucune répartition fausse
- 3 Au moins trois répartitions exactes sans répartition fausse, sans explications ou avec explications partielles ou deux répartitions exactes avec explications et sans répartition fausse
- 2 Au moins deux répartitions exactes (sans explications) et au plus une solution fausse ou au moins trois répartitions exactes (sans explications) et au plus deux répartitions fausses
- 1 Une seule répartition exacte avec éventuellement d'autres solutions fausses
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux** : 6, 7, 8

**Origine** : Bourg en Bresse

**11. PAS SI SIMPLE...** (Cat. 6, 7, 8)

Le professeur de mathématiques propose une devinette à la classe :

*En utilisant trois fois le nombre 5 et une fois le nombre 1 vous devez obtenir 24 par des additions, soustractions, multiplications ou divisions.*

*Par exemple :*

*$(5 + 1) \times (5 - 1) = 24$  ne convient pas car il n'y a que deux nombres 5 et deux nombres 1,*

*$(5 \times 5) - 1^5 = 24$  ne convient pas non plus car  $1^5$  n'est pas une des opérations autorisées.*

*Mais je peux vous assurer qu'il y a une solution.*

**Quelle est la solution à la devinette proposée par le professeur ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

- Obtenir 24 à partir des quatre nombres 5, 5, 5 et 1 par des opérations arithmétiques : addition, soustraction, multiplication et division.

**Analyse de la tâche**

- Effectuer des essais en utilisant éventuellement une calculatrice et se convaincre qu'il n'y a pas de solution en restant dans l'ensemble des entiers naturels.
- Essayer en partant de 24 d'ajouter, de soustraire ou de diviser par 5 et raisonner sur les nombres obtenus en utilisant encore deux fois le nombre 5 et une fois le nombre 1.

Ou : prendre conscience que la seule manière d'obtenir un nombre décimal avec une seule opération à partir des nombres 5 et 1 est de diviser 1 par 5, ce qui donne 0,2.

Continuer en essayant d'obtenir 24 à partir de 0,2 en utilisant deux fois le nombre 5. Trouver que la seule façon d'y parvenir est d'effectuer  $(5 - 0,2) \times 5 = 4,8 \times 5 = 24$

**Attribution des points**

- 4 L'expression correcte,  $(5 - 1/5) \times 5$  avec explications sur la procédure de recherche
- 3 L'expression correcte sans explications
- 2 La bonne succession d'opérations mais avec une expression incorrecte (par exemple  $5 - 1/5 \times 5$ )
- 1 Une explication convaincante du fait qu'il n'y a pas de solution avec des entiers ou une présentation d'éléments montrant une compréhension du problème
- 0 Incompréhension du problème ou essais incorrects (ne respectant pas les contraintes)

**Niveaux :** 6, 7, 8

**Origine :** Bourg en Bresse

**12. QUITTE OU TRIPLE** (Cat. 6, 7, 8, 9)

Pour sa fête d'anniversaire, Louise a organisé un jeu de questions et réponses, « Quitte ou triple » où, à chaque partie, les joueurs misent un certain nombre de jetons et répondent à une question.

Les règles du jeu sont les suivantes :

- Si le joueur donne une réponse juste à la question, il gagne et reçoit le triple du nombre de jetons qu'il a misés.
- Si le joueur donne une réponse fausse, il perd tous les jetons qu'il a misés.

Paul décide de jouer ainsi à « Quitte ou triple » :

Il misera tous ses jetons et, s'il gagne, il en donnera à chaque fois 12 à son petit frère Pierre pour constituer une réserve, puis il jouera à nouveau avec tous les jetons qui lui restent.

Paul joue et gagne ses trois premières parties. Après sa troisième partie, il a donné en tout 36 jetons à Pierre et il lui en reste 87 pour la quatrième partie.

**Combien de jetons Paul avait-il avant de commencer à jouer à « Quitte ou triple » ?**

**Expliquez votre raisonnement**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Trouver le nombre qui, transformé trois fois de suite par la fonction « multiplier par 3 puis soustraire 12 », donne 87.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre qu'il y a une différence entre le nombre de jetons mis en jeu et ceux qui ont été gagnés.
- Démarche arithmétique :  
Se rendre compte qu'avant de jouer sa deuxième et troisième partie, Paul a 12 jetons de moins que ceux qu'il a gagnés à la partie précédente. Il est alors préférable de raisonner à partir du nombre final de jetons (87).  
En procédant par un raisonnement à rebours, on peut en déduire le gain de Paul à la troisième partie. Ce gain s'élève à  $87 + 12 = 99$  jetons. Il avait donc  $99 : 3 = 33$  jetons avant la troisième partie.  
De cela, on peut déduire le nombre de jetons que Paul avait après la deuxième partie, à savoir  $33 + 12 = 45$ .  
Donc, avant de jouer sa deuxième partie, il avait  $45 : 3 = 15$  jetons.  
Vu qu'il a aussi donné 12 jetons à son frère après la première partie, il devait en avoir  $15 + 12 = 27$  à l'issue de celle-ci. C'est ainsi qu'on peut affirmer qu'il avait  $27 : 3 = 9$  jetons avant de commencer la première partie.
- Démarche algébrique:  
Soit  $x$  le nombre de jetons que Paul avait avant de jouer la première partie.  
Après la première partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul avait  $3x - 12$  jetons.  
Après la deuxième partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul avait  $3(3x - 12) - 12$  jetons.  
Après la troisième partie, après déduction des jetons donnés à son frère, Paul a  $3[3(3x - 12) - 12] - 12$  jetons.  
Il faut donc résoudre l'équation :  $3[3(3x - 12) - 12] - 12 = 87$ . On trouve  $x = 9$ .
- Par tâtonnements :  
Émettre une hypothèse sur le nombre initial de jetons que possédait Paul.  
Ou : le nombre de jetons gagnés après la première partie est à choisir parmi les multiples de 3 supérieurs à 12, puisqu'à ce nombre il faudra ensuite soustraire 12, ce qui nous laisse 15, 18, 21, 27, 30, ... comme possibilités. Le nombre 27 donne la bonne réponse.

**Attributions des points**

- 4 Réponse correcte (9 jetons) avec explications claires et calculs détaillés
- 3 Réponse correcte avec explications peu claires ou incomplètes ou bien seulement une vérification
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou réponse fausse due à une erreur de calcul, mais avec explication
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 6, 7, 8, 9

**Origine :** Lodi

### 13. L'ÂNE CADICHON (Cat. 7, 8, 9, 10)

Bertrand utilise son âne Cadichon pour transporter les pommes de son verger au magasin en ville où elles seront vendues. Le magasin est distant de 30 km du verger et Bertrand a produit 90 kg de pommes.

Cadichon est capable de transporter 30 kg de pommes à la fois, mais pour chaque kilomètre parcouru en portant des pommes, il en mange 1 kg. Il ne mange rien s'il n'est pas chargé.

Bertrand a compris que si Cadichon fait les 30 km d'une seule traite, en partant avec 30 kg au départ, il mangera toutes les pommes et n'aura plus rien sur le dos lorsqu'il arrivera au magasin.

Il décide alors de faire des dépôts entre le verger et le magasin.

Par exemple, si lors d'un premier voyage il dépose 15 kg à mi-parcours, il peut faire un deuxième voyage avec 30 kg au départ, puis arrivé à mi-parcours, charger les 15 kg du dépôt et arriver avec 15 kg au magasin. Il restera alors encore 30 kg dans le verger.

Mais Bertrand peut livrer davantage de pommes au magasin en organisant mieux ses dépôts.

**Combien de kg au maximum Bertrand pourra-t-il arriver à livrer au magasin ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

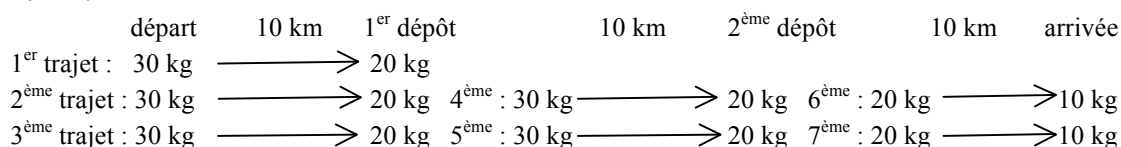
#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

Optimisation d'un transport de 90 kg sur une distance de 30 km avec un transporteur de charge maximale un 30 kg consommant 1 kg par km.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre la situation et comprendre pourquoi, si Cadichon fait des voyages de 30 km d'une seule traite, il mangera toutes les pommes.
- Comprendre qu'en organisant des dépôts, il est possible de livrer des pommes au magasin. Comprendre l'exemple décrit dans l'énoncé. Faire des essais comme dans cet exemple avec plusieurs dépôts, par exemple un dépôt tous les 10 km :



Dans cet exemple, Bertrand livre 20 kg de pommes.

- Pour une étude plus systématique, comprendre que le poids des pommes mangées par Cadichon ne dépend pas de la charge qu'il porte, mais seulement de la distance parcourue. En déduire qu'il vaut mieux que Cadichon voyage en pleine charge de 30 kg et minimiser le nombre de ses trajets.
- Raisonner « à l'envers » : Cadichon doit franchir la distance  $x$  entre le dernier dépôt et le magasin en une seule fois et en emportant 30 kg de pommes, il en livre  $30 - x$ .
- Comme il ne peut déposer 30 kg de pommes dans ce dernier dépôt en une seule fois, il devra parcourir la distance entre l'avant dernier dépôt et le dernier en au moins deux fois, partant à chaque fois avec au plus 30 kg de pommes. Pendant ces deux trajets, Cadichon mangera donc la moitié de ces 60 kg de pommes, soit 15 kg à chaque voyage. La distance entre ces deux dépôts est donc au mieux de 15 km.
- Pour déposer 60 kg de pommes, Cadichon doit faire au moins 3 voyages. Au mieux, il en fera exactement 3. Or il a 90 kg de pommes à transporter au départ. Il peut effectivement le faire en 3 voyages de 30 kg chacun. Pour livrer 60 kg de pommes, il peut manger 30 kg de ces 90 kg en trois fois, soit 10 kg par voyage. La distance séparant le verger du premier dépôt est donc au mieux de 10 km.
- Il reste donc  $x = 5$  km séparant le deuxième dépôt du magasin et Bertrand va pouvoir livrer  $30 - 5 = 25$  kg de pommes.

##### Attribution des points

- Réponse correcte (25 kg de pommes, avec des dépôts à 10 km et 25 km du verger) avec les positions de dépôts et explications claires des trajets
- Réponse 20 kg de pommes avec un exemple et des explications incomplètes et peu claires  
ou réponse correcte 25 kg avec explications incomplètes
- Réponse 20 kg de pommes sans explications  
ou un autre nombre supérieur à 15 et inférieur à 20, avec un raisonnement cohérent, conscient de la nécessité de faire des dépôts pour livrer des pommes

1 Début de raisonnement correct montrant l'impossibilité de livrer des pommes par des trajets de 30 km d'une seule traite

0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 7, 8, 9, 10

**Origine :** littérature traditionnelle, interprétation : Riva del Garda

**14. LES ACCROS DU BOULOT** (Cat. 7, 8, 9, 10)

En consultant son agenda, Laurent a constaté que 2014 est une année à 52 dimanches, comme l'était déjà 2013 et comme le sera 2015. Il se lamente et demande : *Mais quand y aura-t-il une année à 53 dimanches ?*

Son ami Jean-Marc lui dit :

*Il ne faudra pas attendre très longtemps pour avoir une année à 53 dimanches, mais moi je préfère les années avec 53 week-ends entiers (samedi et dimanche) !*

**Quelle sera la prochaine année avec 53 dimanches et quelle sera la prochaine année avec 53 week-ends entiers ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer les régularités des années qui ont 53 dimanches et celles qui ont 53 week-ends.

**Analyse de la tâche**

- Partir du constat qu'une année non bissextile a 365 jours alors qu'une année bissextile en a 366.
- Déterminer le nombre de semaines entières et de jours restants en divisant le nombre de jours de l'année par le nombre de jours d'une semaine et trouver :  $365 = 52 \times 7 + 1$  voire  $366 = 52 \times 7 + 2$ , ou parvenir à ce constat à l'aide d'un calendrier.
- En déduire qu'une année non bissextile aura six jours qui se répéteront 52 fois et un jour 53 fois, le 1 janvier et le 31 décembre. En 2014 c'est le mercredi (en consultant l'agenda), en 2015 le jeudi, en 2016 le vendredi et en 2017 le dimanche (car l'année précédente était bissextile et il y a un décalage de deux jours).
- Une année bissextile aura cinq jours qui se répéteront 52 fois et deux jours 53 fois. Pour avoir une année avec 53 week-ends il faut donc chercher parmi les années bissextiles à venir, celles qui auront deux samedis et deux dimanches : en 2016, deux vendredis et deux samedis (1 et 2 janvier et 30 et 31 décembre), puis avec un décalage de cinq jours, 2020 deux mercredis et jeudis, 2024 deux lundis et mardis, 2028 deux samedis et deux dimanches, ou deux week-ends.

Ou : organiser les énumérations à partir des premiers et derniers jours de l'année, en respectant l'écart d'un jour d'une année à l'autre ou de deux jours après le 29 février des années bissextiles :

	1 janvier	2 janvier	30 décembre	31 décembre
2014	mercredi	jeudi	mardi	mercredi
2015	jeudi (+1)	vendredi (+1)	mercredi (+1)	jeudi (+1)
2016	vendredi (+1)	samedi (+1)	vendredi (+2)	samedi (+2)
<b>2017</b>	<b>dimanche</b> (+2)	lundi (+2)	samedi (+1)	dimanche (+1)
...				
2020	mercredi (+3)	jeudi (+3)	mercredi (+4)	jeudi (+4)
2024	lundi (+5)	mardi (+5)	lundi (+5)	mardi (+5)
<b>2028</b>	<b>samedi</b> (+5)	<b>dimanche</b> (+5)	<b>samedi</b> (+5)	<b>dimanche</b> (+5)

**Attribution des points**

- 4 Réponses correctes (2017 et 2028) avec explications complètes
- 3 Réponses correctes avec explications incomplètes  
ou seulement la réponse 2028 avec explications complètes (avec oubli de la réponse 2017)
- 2 Réponses correctes sans explications  
ou réponses incorrectes dues à une seule erreur (décalage inexact) mais avec explications complètes  
ou seulement la réponse 2017 avec explications complètes
- 1 Début de raisonnement correct, par exemple la conclusion que l'année recherchée devra être une année bissextile
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 7, 8, 9, 10

**Origine :** Luxembourg, la et fj

### 15. PESON A RESSORT (Cat. 8, 9, 10)

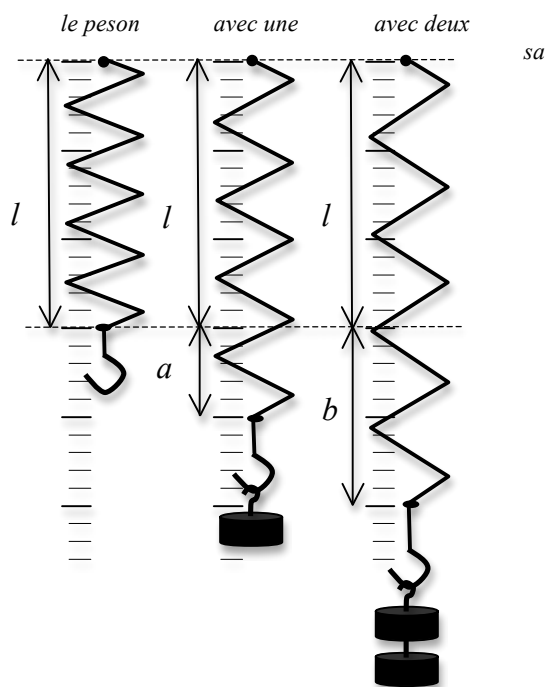
Un peson à ressort est un appareil de mesure constitué d'un ressort muni d'un crochet à une extrémité et fixé par l'autre extrémité à un support. Lorsqu'on accroche des charges au crochet, le ressort s'allonge.

L'allongement du ressort est proportionnel au poids de l'objet suspendu.

Sur le schéma ci-contre le même peson est représenté d'abord sans charge, de longueur  $l$ , puis avec une charge où il s'est allongé de  $a$  puis avec deux charges où il s'est allongé de  $b$  qui est le double de  $a$ .

Le ressort d'un peson A, sans charge, a une longueur de 10 cm. Quand on lui suspend un objet de 3 kg, sa longueur devient 16 cm.

Le ressort d'un autre peson B, sans charge, a une longueur de 5 cm. Quand on lui suspend un objet de 2 kg, sa longueur devient 11 cm.



**Trouvez la masse d'un objet tel que la longueur des ressorts des deux pesons A et B soit la même, qu'il soit suspendu soit à l'un soit à l'autre.**

**Quelle longueur les deux ressorts des pesons auront-ils avec la masse de cet objet ?**

**Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.**

#### ANALYSE A PRIORI

##### Tâche mathématique

- Dans un contexte de pesons à ressort, déterminer la force (le poids) pour lequel deux ressorts de longueurs initiales et « coefficients d'allongements » différents, auront la même longueur, sachant que les allongements sont proportionnels à la force.

##### Analyse de la tâche

- Comprendre le fonctionnement d'un peson : le ressort, ses caractéristiques mécaniques, sa longueur, son allongement et la relation de proportionnalité : allongement = force  $\times$  « coefficient d'allongement », entre l'allongement du ressort et la masse qui lui est suspendue.
- Déterminer comment évolue la longueur de chaque peson selon le poids : longueur initiale + allongement ou longueur initiale + force  $\times$  « coefficient ».
- Pour le peson A, l'allongement est de  $16 - 10 = 6$  (cm) pour 3 (kilogramme-force), donc le coefficient est 2 (cm/kilogramme-force), alors que pour le peson B, on a :  $11 - 5 = 6$  (cm) pour 2 kg, donc le coefficient est 3 (cm/kilogramme-force).
- En déduire les longueurs des deux ressorts (en cm) en fonction d'un poids  $M$  (en kilogramme-force) :  $L = 10 + 2M$  pour le peson A,  $L = 5 + 3M$  pour le peson B.
- Pour trouver la masse qui permet d'atteindre la même longueur pour les deux ressorts, il y a plusieurs manières de procéder :
  - par algèbre : évaluer les deux longueurs et obtenir l'équation en  $M$  :  $10 + 2M = 5 + 3M$  puis en déduire que la masse  $M$  vaut 5 kg et que la longueur des ressorts A et B est alors 20 cm ;
  - graphiquement en représentant les deux fonctions affines par des droites (définies par deux points, (0, 10) et (3, 16) pour A et (0, 5) et (2, 11) pour B) dont l'intersection a pour coordonnées :  $L = 20$  et  $M = 5$  ;
  - par un tableau donnant les longueurs des ressorts en fonction des masses suspendues en utilisant la proportionnalité des allongements :

Masses (kg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Allongement du ressort A (cm)	0	2	4	6	8	10	12	14	16
Longueur du ressort A (cm)	10	12	14	16	18	20	22	24	26
Allongement du ressort B (cm)	0	3	6	9	12	15	18	21	24
Longueur du ressort B (cm)	5	8	11	14	17	20	23	26	29

Observer que pour une masse de 5 kg, les deux ressorts mesurent 20 cm.

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (5 kg et 20 cm) avec une explication claire
- 3 Réponse correcte avec une explication peu claire ou incomplète
- 2 Réponse correcte sans explication  
ou absence de la deuxième valeur avec explication
- 1 Début de recherche avec un calcul correct des constantes de proportionnalité des deux ressorts  
ou absence de la deuxième valeur sans explication
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 8, 9, 10

**Origine :** Franche-Comté

**16. UNE NOUVELLE VOITURE** (Cat. 8, 9, 10)

La nouvelle voiture RMT22 a été mise en vente au même prix dans tous les pays du monde.

Un riche Américain décide d'en acquérir trois, qu'il offrira à ses trois neveux qui vivent dans des pays différents.

Il achète la première pour son neveu qui vit en Italie où, en plus du prix de base, il paye la TVA à 21 %.

Il achète la deuxième pour son neveu qui habite en France où la TVA est, en revanche, de 20 %. Pour ces deux premières voitures, il paye un total de 22 413 €,

Il achète la troisième pour son neveu qui vit en Transalpie, qu'il paye seulement 10 044 €, avec la TVA incluse.

**Quel est le pourcentage de la TVA en Transalpie ?**

**Expliquez votre raisonnement.**

---

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

- Déterminer le prix de base d'une voiture hors TVA, égal dans les trois pays, à partir des informations relatives à son prix avec TVA en Italie et en France et en déduire le pourcentage de TVA en Transalpie.

**Analyse de la tâche**

- Procéder par essais à partir d'un coût de base plausible de la voiture (par exemple 10 000 €). L'application de 21% dans le premier cas et 20 % dans le second cas donne un total de 24 100 €.
- Constatant que le prix de base est inférieur, faire d'autres essais visant à réduire ce prix de 50 € en 50 € par exemple, puis finir par effectuer les calculs avec un prix de base de 9 300 €.
- En déduire que la TVA en Transalpie s'élève à 744 € et que cette valeur correspond à 8 % du coût de base de la voiture ( $744 / 9\,300 = 0,08$ ).

Ou bien, utiliser pour l'Italie et la France la valeur moyenne de 20,5 % de TVA, diviser le prix payé 22 413 € par 2 (prix moyen d'une voiture) et diviser par 1,205 pour obtenir son prix de base : 9300 €.

Ou bien, utiliser une équation de la forme  $x + 0,21x + x + 0,20x = 22\,413$  ou  $1,21x + 1,20x = 22\,413$  et en déduire que  $x = 9300$  € est le prix d'une voiture,

puis pour trouver la TVA de Transalpie ( $y$ ), résoudre l'équation  $9300(1 + y) = 10\,044$  d'où  $y = 0,08$  ou 8 %

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (8%) avec explications claires et complètes
- 3 Réponse correcte (8%) avec des explications incomplètes
- 2 Réponse correcte (8%) sans explication  
ou procédure et explication correctes mais erreur de calcul
- 1 Début de raisonnement correct
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux** : 8, 9, 10

**Origine** : Campobasso

**17. BOULES DE PETANQUE** (Cat. 9, 10)

Une boule de pétanque de compétition est une boule creuse qui a une masse de 690 g et un diamètre extérieur de 7,4 cm.

Elle est faite en acier dont la masse volumique est  $7,85 \text{ g/cm}^3$ .

**Calculez l'épaisseur de l'acier** (Donnez votre réponse au mm près).

**Expliquez votre raisonnement et montrez les calculs que vous avez faits.**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

- Calculer l'épaisseur d'une boule creuse en connaissant la densité du métal dont elle est constituée, son diamètre et son poids.

**Analyse de la tâche**

- Comprendre et se représenter les relations entre les rayons, les volumes et les masses des trois objets en présence : la boule de pétanque creuse, la sphère extérieure, la sphère intérieure, ces deux dernières pouvant être hypothétiquement considérées comme pleines pour les besoins des calculs de masses.
- Connaître et maîtriser le rapport entre le volume et la masse (relation de proportionnalité dont le facteur est la masse volumique,  $7,85 \text{ g/cm}^3$ ).
- Connaître le rapport entre le rayon et le volume d'une boule (ou sphère)  $V = 4\pi r^3/3$  et maîtriser les approximations qui découlent du facteur  $4\pi/3$ .
- Il y a de nombreuses manières de calculer les différentes valeurs des masses et volumes, à partir des deux rapports ci-dessus et à partir de la relation additive : les rayons, volumes et masses de la boule de pétanque sont respectivement la différence entre ceux de la boule extérieure et ceux de la boule intérieure.

objets :	boule creuse	sphère extérieure	sphère intérieure
rayon (cm)	(épaisseur) $x$ ou $r + 3,7$	3,7	$r$ ou $3,7 - x$
volume ( $\text{cm}^3$ )	$690 : 7,85 \approx 87,9$	$4\pi/3 \times 3,7^3 \approx 212$	$4\pi/3 \times r^3 \approx 124,1$ ( $212 - 87,9$ )
masse (g)	690	$(4\pi/3 \times 3,7^3) \times 7,85 \approx 1665$	$\approx 975$ ( $1665 - 690$ )

Par exemple, une des procédures les plus courtes est de calculer le volume de la boule de pétanque à partir de sa masse  $690 : 7,85 \approx 87,9$ , puis le volume de la sphère extérieure  $4\pi/3 \times 3,7^3 \approx 212$  et par différence, une approximation du volume de la sphère intérieure  $124,1 = 212 - 87,9$  pour en tirer une approximation de son rayon ( $124,1 = 4\pi/3 \times r^3 : \approx 3,1$  et trouver l'épaisseur de la boule par la relation  $\approx 0,6 = 3,7 - 3,1$  (en cm).

**Attribution des points**

- 4 Réponse correcte (0,6 cm) avec un raisonnement correct et des calculs aboutissant au résultat
- 3 Réponse correcte (0,6 cm) avec une explication peu claire ou incomplète  
ou réponse (1,2 cm) avec explications claires mais confusion entre le diamètre (7,4) et le rayon (3,7)
- 2 Réponse erronée à cause d'une erreur de calcul mais procédure correcte  
ou seulement le calcul du volume de la partie creuse
- 1 Début d'une recherche cohérente
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** Franche-Comté

**18. APRES 2013 !!** (Cat 9, 10)

Voici les quatre premiers termes d'une longue suite ainsi construite :

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \dots$$

Calculez la somme de ces termes jusqu'au 2013<sup>e</sup> :

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2013} \times \frac{1}{2014}$$

puis multipliez-la par 2014.

Quel nombre avez-vous trouvé ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse

**ANALYSE A PRIORI****Contenu mathématique**

Calculer la somme des 2013 premiers termes de la suite  $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2}; \frac{1}{2} \times \frac{1}{3}; \frac{1}{3} \times \frac{1}{4}; \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} \dots$  et la multiplier par 2014

**Analyse de la tâche**

- Observer les premiers termes de la suite, comprendre la règle de construction et la généraliser pour découvrir le 2013<sup>e</sup> terme :  $\frac{1}{2013} \times \frac{1}{2014}$

à cet effet, il faut comprendre que chaque terme est le produit de deux fractions de numérateur 1 et de dénominateurs successifs et que le premier des deux dénominateurs est le numéro d'ordre du terme le n<sup>e</sup> terme, est le produit  $\frac{1}{n} \times \frac{1}{n+1}$

- Passer ensuite à la somme  $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{1}{6} +$

et se rendre compte qu'il n'est pas possible d'écrire explicitement les 2013 termes de cette somme et qu'il faut chercher une règle généralisable pour calculer la somme demandée : le premier terme est  $\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ , le 2<sup>e</sup> est

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$ , le 3<sup>e</sup> est  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$ , et la somme à calculer devient ainsi :  $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \dots$

puis (ou directement) calculer les sommes successives des premiers termes de la somme et les simplifier pour

aboutir à la suite des sommes successives :  $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}$

- Constater que cette nouvelle suite est composée de fractions dont le dénominateur est égal au numérateur plus 1.
- Le 2013<sup>e</sup> terme de cette suite sera ainsi  $\frac{2013}{2014}$  et son produit par 2014 sera 2013.

**Attribution des points**

4 Réponse correcte (2013) avec explications et calculs explicites de sommes partielles

3 Réponse correcte (2013) sans explications

2 Réponse fautive en raison d'une erreur de calcul mais avec une démarche correcte

ou, conduite du raisonnement jusqu'à la suite des sommes des premiers termes  $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \frac{5}{6}; \frac{6}{7} \dots$

1 Début de recherche correct, par exemple calcul de quelques trois ou quatre sommes partielles

0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 9, 10

**Origine :** fj

**19. LA CRISE** (Cat. 10)

Une société a fait son entrée en bourse. La valeur initiale de ses actions était de 100 dollars. A cause de la crise financière la valeur des actions a baissée de 10 % après la première année. Les économistes de la société font une simulation en supposant que la valeur d'une action va perdre chaque année 10 % de la valeur qu'elle avait au début de l'année.

**Au bout de combien d'années une action aurait-elle alors perdu plus que la moitié de sa valeur initiale de 100 dollars?**

**Au bout de combien d'années la valeur d'une action serait-elle de moins d'un dollar ?**

**ANALYSE A PRIORI****Tâche mathématique**

Déterminer l'année où une fonction, définie dans  $\mathbb{N}$ , décroissante (perdre 10% par an) passe au-dessous de la moitié de sa valeur initiale

**Analyse de la tâche**

- Comprendre que la diminution (10%) est calculée sur un valeur qui change chaque année et que perdre plus de la moitié signifie arriver à moins de 50 dollars. La réponse : « 5 ans » est erronée.
- Faire les calculs successifs pour chaque année et les présenter par exemple dans un tableau tel que celui-ci :

Année	Valeur début de l'année	10 % de la valeur	Valeur fin de l'année
1	100	10	90
2	90	9	81
3	81	8,1	72,90
4	72,90	7,29	65,61
5	65,61	6,56	59,05
6	59,05	5,90	53,15
7	53,15	5,31	<b>47,84</b>
8	<b>47,84</b>		

- En déduire qu'au bout de 7 ans la valeur d'une action serait moins que la moitié de ses 100 dollars.
- Le calcul du nombre d'années au bout desquelles la valeur serait moins d'un dollar s'avère fastidieux. Remarquer, pour faciliter les calculs, que pour obtenir la valeur à la fin de l'année  $k$  il faut multiplier la valeur au début de l'année  $k$  par 0,9.
- Si  $V = 100$  dollars est la valeur initiale de l'année 1, alors la valeur au bout d'un an est  $100 \times 0,9$ , au bout de deux ans  $100 \times (0,9)^2$  dollars,... au bout de  $k$  années  $100 \times (0,9)^k$  dollars.
- En déduire que la condition à réaliser est  $100 \times (0,9)^k < 1$ .
- Utiliser la fonction puissance d'une calculatrice (ou d'un tableur) pour trouver  $k = 44$ .

**Attribution des points**

- 4 Réponses correctes (7 ans, 44 ans) avec explications claires ou un tableau et les calculs indiqués
- 3 Réponses correctes avec explications incomplètes ou réponse 7 ans et la multiplication par  $(0,9)^k$  indiquée sans trouver  $k$
- 2 Réponse 7 ans correcte avec des explications claires
- 1 Début de recherche cohérente, par exemple le calcul des sommes restantes pour les 3 premières années.
- 0 Incompréhension du problème

**Niveaux :** 10

**Origine:** Groupe problèmes