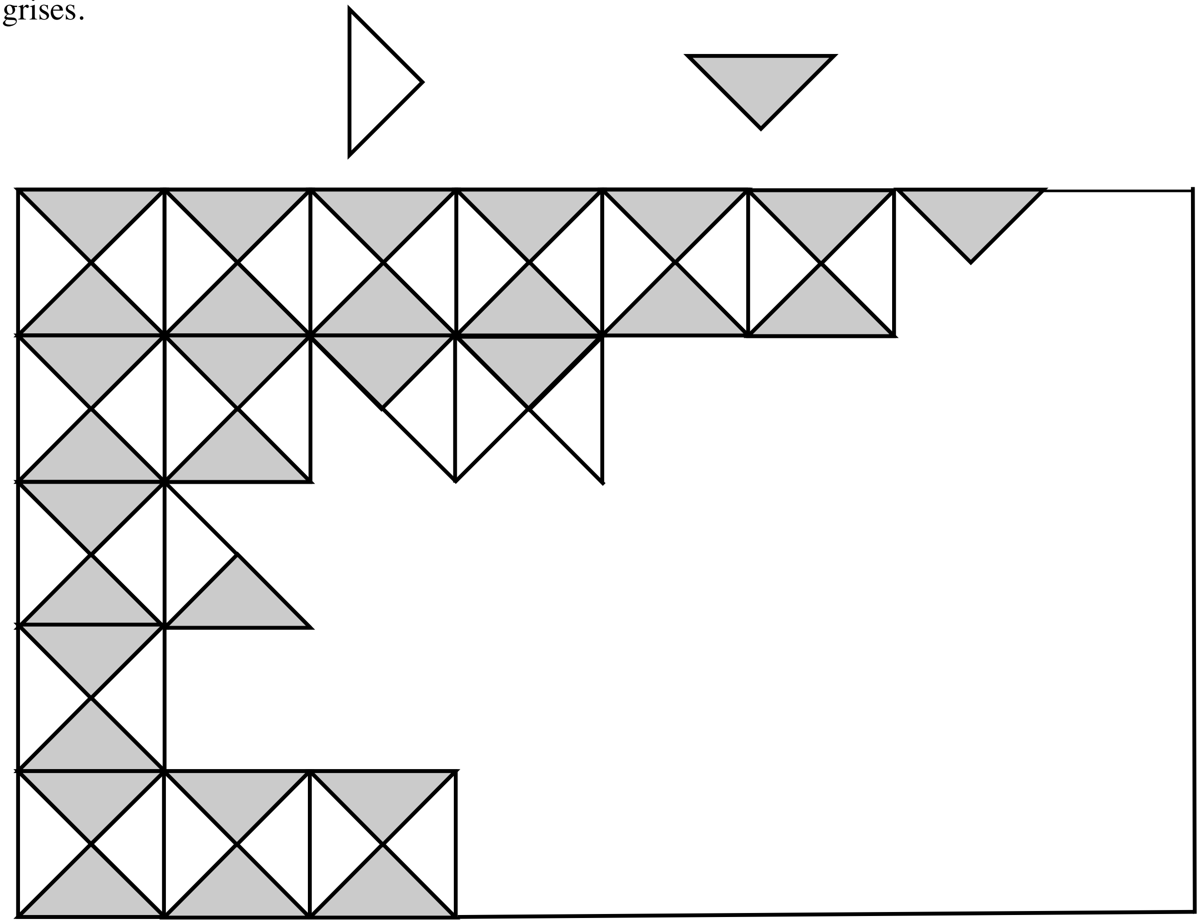
N°	titre	3	4	5	6	7	8	9	10	Ar.	Alg.	Ge.	Lo/Co.	Orig
1.	Mosaïque bicolore	3	4							x		x		12.F.2
2.	Accrocher un poster	3	4									x		5.I.1
3.	Vente de pâtisseries	3	4	5						x				SR
4.	Toujours le double	3	4	5						x				BB
5.	Petits et grands gobelets	3	4	5						x				SR
6.	La frise		4	5	6					x			x	SI
7.	Les carrés d'Antoine (I)			5	6					x		x		CB
8.	Pommiers, abricotiers et cerisiers			5	6	7				x			x	SI
9.	Championnat de mini-kart			5	6	7				x			x	SI
10.	Lancers francs au basket				6	7				x			x	g.prop.
11.	Les abricots				6	7	8			x	x			g.op.
12.	Nouveaux feutres				6	7	8			x				SI
13.	Les carrés d'Antoine (II)					7	8			x		x		CB
14.	Qui suis-je ?					7	8	9	10	x				BB
15.	Des bonbonnières aux invités						8	9	10	x				RZ
16.	La bouteille d'huile						8	9	10	x		x		CA-SS
17.	Le marathon de Translapie 2013						8	9	10	x				SI
18.	Les quatre piquets							9	10			x	x	g.gp.
19.	L'ascenseur							9	10	x			x	PR
20.	Triangles et cercles							9	10	x	x	x		lg

1. MOSAÏQUE BICOLORE (Cat. 3, 4)

Sophie est en train de coller les tesselles d'une mosaïque bicolore. Ses tesselles sont blanches et grises.



Combien de tesselles blanches et combien de tesselles grises Sophie doit-elle encore coller pour compléter sa mosaïque ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : isométries (pavages) ; triangles, carrés et diagonales
- Arithmétique : comptages, opérations

Analyse de la tâche

- Percevoir la trame en carrés et remarquer que dans chaque carré il y a deux tesselles triangulaires blanches et deux grises.
- Pour compter les tesselles qui manquent, les élèves ont plusieurs méthodes à leur disposition :
  - Compléter le dessin en entier et compter les tesselles.
  - Centrer l'attention sur les carrés à compléter. Observer qu'il y a 23 carrés manquants entièrement et que ceux-ci se complètent avec 46 tesselles grises et 46 tesselles blanches. Remarquer qu'il reste 4 carrés à compléter : dans l'un il manque une tesselle grise, dans un autre une tesselle grise et deux blanches et dans les deux autres une tesselle grise et une blanche. Faire le calcul pour les tesselles grises (46 + 1 + 1 + 2 = 50) et pour les tesselles blanches (46 + 0 + 2 + 2 = 50).

Ou bien : calculer le nombre total des carrés, 5 x 8 = 40, en déduire que dans la mosaïque une fois finie, il y aura 80 tesselles de chaque couleur. Compter les tesselles qui sont déjà posées, 30 grises et 30 blanches. Calculer la différence pour chaque sorte, les grises : 80 – 30 = 50, les blanches : 80 – 30 = 50, (procédure qui utilise le registre numérique).

Attribution des points

4 Réponse correcte (50 blanches, 50 grises), avec des explications claires (un dessin ou d'autres procédures bien décrites)

3 Réponse correcte, avec des explications partielles (dessin peu clair)

2 Réponse correcte sans aucune explication ni dessin
ou réponse erronée avec une erreur de calcul ou de comptage d'une ou de deux unités pour une sorte de tesselle ou pour les deux sortes mais avec des explications

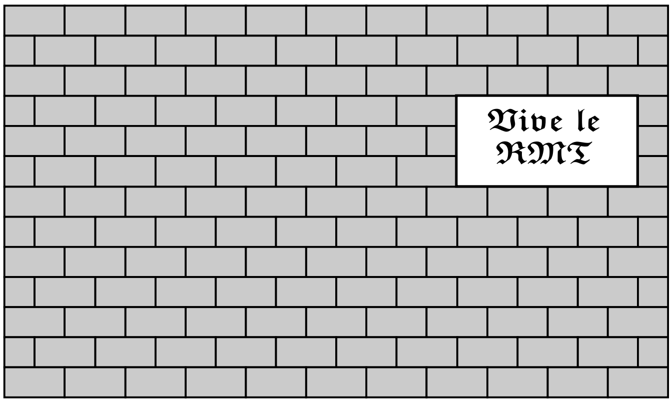
1 Début de procédure correcte ou plus d’une erreur de comptage ou de calcul

0 Incompréhension du problème

Niveau : 3, 4

Origine : 12.F.2 *Pavage*

2. ACCROCHER UN POSTER (Cat. 3, 4)



Les enfants de l'école de Transalpie ont fait un beau poster et ils l'ont placé sur un mur comme l'indique le dessin. Mais quelques enfants trouvent que le poster est trop haut et trop à droite et décident de l'installer exactement au centre du mur.

Dessinez le poster au centre du mur.

Combien de briques entières seront-elles cachées quand le poster sera au centre du mur ?

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Géométrie : rectangle, centre d'un rectangle
- Arithmétique : comptages

Analyse de la tâche

- Se rendre compte qu'il peut être utile de trouver, en unités de « briques », les dimensions du mur (11 briques en horizontal et 13 briques en vertical) et du poster (3 briques en horizontal et 3 en vertical).
- Comprendre que le nombre de briques entières cachées par le poster change selon la position qu'il occupe
- Pour placer le poster au centre :
  a) imaginer de déplacer d'abord le poster, par exemple, horizontalement de sorte que l'on puisse voir le même nombre de briques à droite et à gauche du poster (4),
  b) dessiner éventuellement le poster dans cette position,
  c) imaginer ensuite de déplacer le poster vers le bas de sorte qu'il y ait le même nombre de lignes de briques visibles au-dessus et au-dessous du poster (5),
  d) dessiner le poster dans sa position finale,
  e) compter les briques entières : 7 briques entières (2, 3, 2).

Ou bien, découper un rectangle identique au poster dessiné et le déplacer jusqu'à ce qu'il soit au centre du mur, ensuite compter les briques entièrement cachées.

Ou bien, voir à l'oeil comment on pourrait placer le poster, le dessiner, puis vérifier qu'il est effectivement au centre du mur. Compter enfin les briques entières.

Ou bien, tracer les deux diagonales du rectangle-mur et comprendre que leur point d'intersection est le centre du mur, dessiner ensuite le poster, ou positionner un modèle, correctement par rapport à ce point central. Compter enfin les briques entières.

Attribution des points

4 Dessin correct avec indication du nombre exact de briques entières cachées par le poster (7)

3 Dessin correct et réponse « 9 briques » (confusion entre « briques entières » et « briques recomposées »)

2 Dessin correct avec nombre de briques erroné (différent du cas « 9 ») ou absent
ou dessin très imprécis et nombre de briques correct

1 Dessin déplacé d'« une brique » vers le haut/le bas ou d'« une demi-brique » vers la gauche/la droite par rapport au dessin correct.

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4

Origine : 5.I.1 *La fenêtre*

3. VENTE DE PÂTISSERIES (Cat. 3, 4, 5)

La classe d'Aurélie a organisé une vente de pâtisseries. Les tartelettes sont vendues 3 euros chacune et les cakes 4 euros chacun.
À la fin de la journée, Aurélie constate que des tartelettes et des cakes ont été vendus et 33 euros ont été encaissés en tout.

Combien de tartelettes et combien de cakes la classe d'Aurélie peut-elle avoir vendus ? Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Arithmétique : décomposition de 33 en sommes de multiples de 3 et de 4

Analyse de la tâche :

- Comprendre que l'on a vendu des tartelettes et des cakes.
- Procéder par essais successifs inorganisés.

  Les élèves peuvent n'utiliser que l'addition : additionner des 3 et des 4 jusqu'à obtenir ou dépasser 33. Ne retenir que les sommes qui donnent 33. Compter le nombre des 3 et des 4 et les interpréter respectivement comme le nombre de tartelettes et le nombre de cakes vendus.

  Les élèves peuvent aussi combiner des multiplications et des additions.

Ou bien : envisager tous les cas possibles de manière organisée en commençant par exemple par 1 cake à 4 euros et essayer de trouver combien de tartelettes à 3 euros il faut ajouter pour obtenir la somme de 33 euros ; continuer en augmentant de 1 en 1 le nombre de cakes vendus et ne retenir que les couples (nombre de cakes, nombre de tartelettes) qui donnent une sommes de 33 euros : 3 cakes et 7 tartelettes ($3 \times 4 + 7 \times 3 = 33$) ou 6 cakes et 3 tartelettes ($6 \times 4 + 3 \times 3 = 33$).

Ou bien : écrire la liste des premiers multiples de 3 et la liste des premiers multiples de 4 (il suffira de ne pas dépasser 30) et chercher les couples de nombres, un multiple de 3 et l'autre multiple de 4, qui donnent une somme de 33 ; vérifier que seulement les couples 9, 24 et 21, 12 conviennent et conclure qu'il a pu être vendu 3 tartelettes et 6 cakes ou bien 7 tartelettes et 3 cakes.

Attribution des points :

4 Le deux solutions (3 cakes et 7 tartelettes ; 6 cakes et 3 tartelettes) avec des explications claires et détaillées

3 Les deux solutions avec des explications peu claires ou incomplètes ou seulement une vérification

2 Une seule solution bien expliquée
ou seulement les deux solutions correctes sans explication ni vérification

1 Début de raisonnement correct
ou une seule solution sans explication ou avec seulement une vérification

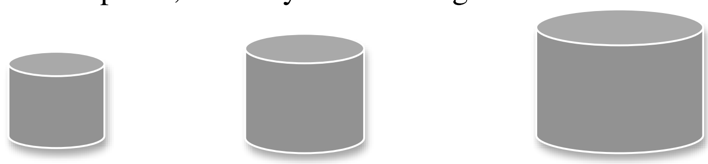
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Suisse Romande

4. TOUJOURS LE DOUBLE … (Cat. 3, 4, 5)

Tom a 3 boîtes : une petite, une moyenne et une grande.



Il veut les utiliser toutes pour ranger ses 100 billes en respectant les conditions suivantes :
- la boîte moyenne doit contenir le double des billes de la petite boîte,
- la grande boîte doit contenir le double des billes de la boîte moyenne.

Tom pourra-t-il ranger toutes ses billes dans les trois boîtes en respectant ces conditions ?

Si ce n'est pas possible, quel est le plus grand nombre de billes qu'il pourra ranger ainsi, toujours en respectant les conditions ?

Expliquez vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances :

- Arithmétique : opérations avec des nombres entiers, double, répartition proportionnelle.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation, en particulier les relations qui doivent exister entre les nombres de billes contenues dans les boîtes.
- Procéder par essais et ajustements en respectant les conditions (par exemple essayer avec 10 billes dans la petite boîte, 20 dans la boîte moyenne et 40 dans la grande : on range 70 billes, trop peu ; essayer, par exemple, avec 15 et trouver qu'on range ainsi 105 billes, trop. Faire d'autres essais et trouver qu'avec 14 billes dans la petite boîte, on range 98 billes en tout, c'est le maximum possible).

Ou bien : considérer qu'une boîte moyenne équivaut à deux petites boîtes, une grande boîte à 4 petites.

- En déduire que l'ensemble des boîtes équivalent à 7 petites boîtes.
- Se demander si 100 billes peuvent être réparties par paquets de 7, en considérant les multiples de 7 ou en effectuant la division de 100 par 7.
- Constater que plus grand multiple de 7 inférieur à 100 est 98 (14x7) ou que la division de 100 par 7 donne 14 comme quotient et 2 comme reste.
- Conclure qu'il n'est pas possible ranger les 100 billes dans les trois boîtes et que le plus grand nombre de billes qui peuvent être rangées est 98.

Attribution des points

4 Réponses correctes (non, 98 billes) avec des explications claires ou la trace d'une recherche explicite

3 Réponses correctes, avec des explications ou trace peu claires
ou réponse correcte (98 billes, sans « non ») avec explications claires

2 Réponses correctes, sans explications ou avec seulement une vérification
ou réponse « non » et la donnée d'un autre multiple de 7 (supérieur à 70) avec explications ou trace claire
ou procédure correcte mais avec une erreur de calcul

1 Réponse « non » et la donnée d'un autre multiple de 7 (supérieur à 70) sans explication,
ou réponse « non » et la donnée d'un autre multiple de 7 (égal ou inférieur à 70) avec des explications ou une trace claires
ou essais respectant les conditions, sans réponse explicite

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Bourg en Bresse

5. PETITS ET GRANDS GOBELETS (Cat. 3, 4, 5)

Julie organise une fête pour l'anniversaire de son petit frère.
Elle a acheté plusieurs bouteilles d'orangeade. Avec le contenu d'une bouteille, elle peut remplir 5 grands gobelets ou 8 petits gobelets.
Pendant la fête, elle a servi 23 grands gobelets et 26 petits gobelets d'orangeade en ouvrant le moins possible de bouteilles.

Combien de bouteilles Julie a-t-elle dû ouvrir ?

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : addition, multiplication, division, fractions et nombres décimaux.

Analyse de la tâche

- Au cours des premiers essais, comprendre que ni l'ordre dans lequel on remplit les gobelets, ni le choix des bouteilles n'a d'importance. Il faut par contre porter l'attention sur le fait qu'on remplit 23 grands gobelets et 26 petits et qu'une bouteille remplit 5 grands gobelets ou 8 petits.
- Procéder, par exemple, en représentant les 23 grands gobelets et en formant avec eux des groupes de 5, chacun équivalant à une bouteille ; compter ensuite ces groupes et trouver qu'ils correspondent à 4 bouteilles avec un reste de 3 grands gobelets. Procéder de même en regroupant les 26 petits gobelets par groupes de 8 et trouver qu'il faut utiliser 3 autres bouteilles avec un reste de 2 petits gobelets.
- Se rendre compte que les 3 grands gobelets et les 2 petits sont remplis en employant une seule autre bouteille (avec une bouteille, on remplit en effet 5 grands gobelets).

Ou bien : utiliser des multiples de 5 et de 8 pour se rapprocher du nombre de gobelets servis.

- Comprendre qu'avec 4 bouteilles, on peut remplir 20 (4×5) grands gobelets, et qu'avec autres 3 bouteilles, on remplit 24 (3×8) petits gobelets. En déduire qu'avec 7 bouteilles, il reste à remplir 3 grands gobelets et 2 petits qui pourront être remplis avec une huitième bouteille.

Ou bien : utiliser la division avec reste ($23 : 5 = 4$ avec reste 3, $26 : 8 = 3$ avec reste 2) et interpréter les quotients en termes de bouteilles et les restes en termes de gobelets grands et petits.

Ou bien utiliser une procédure qui fait intervenir des nombres non entiers. Exprimer le volume de chaque gobelet par rapport à celui d'une bouteille : 1/5 et 1/8 ou 0,2 et 0,25 en nombres décimaux. En déduire que le volume de l'orangeade versée en tout dans les gobelets est $23 \times 0{,}2 + 26 \times 0{,}125 = 4{,}6 + 3{,}25 = 7{,}85$. Conclure que Julie a dû ouvrir 8 bouteilles.

Attribution des points :

4 Réponse correcte (8 bouteilles) avec des explications ou des calculs détaillés

3 Réponse correcte (8 bouteilles) avec des explications peu claires (ou seulement quelques calculs)

2 Réponse correcte (8 bouteilles) sans explications
réponse avec une erreur de calcul mais avec des explications claires et cohérentes

1 Début de raisonnement correct
ou bien réponse « 9 bouteilles » en estimant qu'il faut 4 bouteilles pour remplir les petits verres et 5 pour remplir les grands

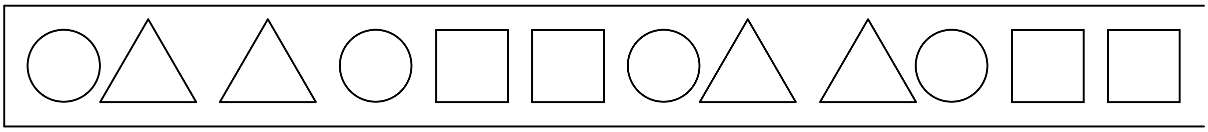
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 3, 4, 5

Origine : Suisse Romande

6. LA FRISE (Cat. 4, 5, 6)

Dans la salle de bain de Philippe, il y a une longue frise de petits carreaux décoratifs, avec des cercles, des triangles et des carrés.
Les figures se succèdent de la manière suivante : un cercle, puis deux triangles, puis un cercle, puis deux carrés, et on recommence avec un cercle, deux triangles, un cercle, deux carrés etc., comme on le voit sur ce dessin.



Philippe compte toutes les figures qui sont sur la frise. Il commence par un cercle, deux triangles (déjà trois figures) puis continue jusqu'à la fin de la frise. Il compte en tout 100 figures.

Quelle est la forme de la dernière figure comptée par Philippe ?

Combien de cercles, combien de triangles et combien de carrés y a-t-il sur toute la frise ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : calcul avec des nombres entiers naturels, division avec reste

Analyse de la tâche

- Observer la partie de la frise qui est dessinée et comprendre comment elle est organisée.
- Identifier le module qui se répète (un cercle, deux triangles, un cercle, deux carrés) et calculer qu'il est formé de 6 figures.
- Chercher le nombre de modules contenus dans les 100 figures, par exemple en divisant 100 par 6. Il y a 16 modules et il reste encore 4 figures, soit : un cercle, deux triangles, un cercle.
- Conclure que la dernière figure comptée par Philippe est un cercle.
- Déduire du nombre de modules et des figures restantes que :
  - les cercles et les triangles sont chacun au nombre de 34 (2 dans chaque module complet et 2 dans le dernier module incomplet) ;
  - les carrés sont au nombre de 32 (2 dans chaque module complet et 0 dans le dernier incomplet).

Ou bien :

- Dessiner la frise en s'arrêtant à un point stratégique avec un nombre entier de modules complets (par exemples à 30 figures, donc 5 modules) et compter combien de figures de chaque sorte on a déjà dessiné.
- Multiplier, dans ce cas, par 3, puis ajouter les 10 figures qui manquent (un module complet plus 4 figures).
  Une autre possibilité est que les élèves dessinent toute la bande, mais il s'agit évidemment d'une procédure plus longue et peu « fiable ».

Attribution des points

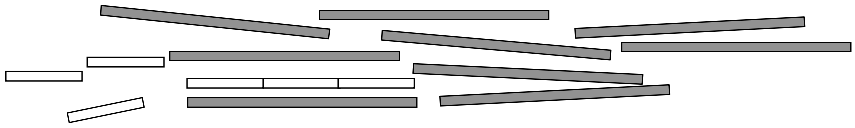
4 Les quatre réponses correctes (cercle ; 34 cercles ; 34 triangles ; 32 carrés) avec des explications claires
3 Les quatre réponses correctes avec explications peu claires
ou trois réponses correctes et une erronée, avec explications claires et cohérentes
2 Les quatre réponses correctes sans explications
ou deux réponses correctes et deux erronée, avec explications
1 Une seule réponse correcte et trois erronées
ou début de raisonnement correct (par exemple découverte du module de 6)
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 4, 5, 6

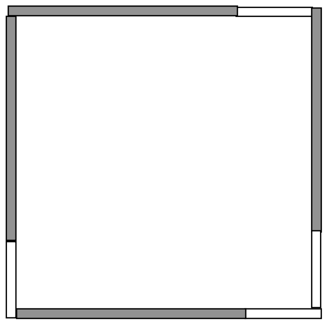
Origine : Siena

7. LES CARRÉS D'ANTOINE (I) (Cat. 5, 6)

Antoine a 15 bâtons : 9 sont gris et 6 sont blancs. Les bâtons de la même couleur ont la même longueur. La longueur des bâtons gris est le triple de celle des bâtons blancs.



Antoine s'amuse à construire des carrés avec ses bâtons. Vous en voyez un ici :



Dessinez le plus grand carré qu'Antoine peut construire avec ses bâtons en montrant clairement sur votre dessin les bâtons utilisés.

Expliquez pourquoi c'est le plus grand possible.

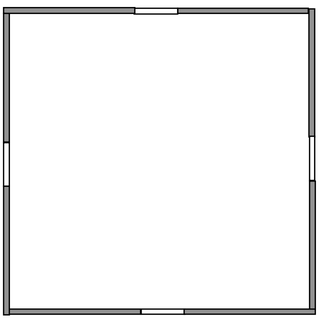
ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations
- Géométrie : mesure, côtés et périmètre du carré

Analyse de la tâche

- Comprendre que si on prend comme unité de longueur celle d'un bâton blanc, il y a 6 bâtons de longueur 1 (les blancs) et 9 de longueur 3 (les gris).
- Comprendre qu'avec cette unité, la somme des longueurs de tous les bâtons est 33 ($1 \times 6 + 9 \times 3 = 33$).
- Déduire que le côté du plus grand carré pourrait avoir pour longueur 8 (car $32 = 4 \times 8$ est le multiple de 4 le plus proche de 33) et essayer de réaliser 4 fois cette longueur avec les bâtons fournis, par essais au hasard ou de façon organisée.
- Conclure qu'il est impossible d'obtenir un carré de côté 8, car il faudrait mettre pour chaque côté deux bâtons gris et deux bâtons blancs, donc 8 au total pour chaque couleur. Mais Antoine ne dispose que de 6 bâtons blancs.
- Essayer de construire un carré de côté 7. Se rendre compte que c'est possible en utilisant 8 bâtons gris et 4 bâtons blancs, comme le montre la figure ci-contre. La disposition de ces bâtons pour former les côtés n'a pas d'importance.
- Conclure que le carré de côté 7 est le plus grand carré que l'on peut construire avec les bâtons disponibles.



Attribution des points

4 Dessin d'un carré de côté 7 avec l'indication des bâtons et la justification claire qu'il est le plus grand possible (citer explicitement l'impossibilité de construire un carré de côté 8)

3 Dessin d'un carré de côté 7 avec l'indication des bâtons, mais sans expliquer pourquoi il est le plus grand possible

2 Dessin d'un carré de côté 7 sans indication claire des bâtons utilisés

1 Dessin d'un carré de côté 6 (qui n'est pas le plus grand)
ou dessin d'un carré de côté 8 qui ne respecte pas toutes les contraintes

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6

Origine : Campobasso

8. POMMIERS, ABRICOTIERS ET CERISIERS (Cat 5, 6, 7)

Monsieur Durand a planté dans son verger une longue file de 24 arbres fruitiers. Il y a des pommiers, des abricotiers et des cerisiers. Il a employé les règles suivantes :

- Les pommiers sont toujours plantés par séries de trois qui se suivent.
- Les abricotiers sont toujours plantés par deux qui se suivent.
- Chaque couple d'abricotiers suit toujours une série de trois pommiers et après chaque série de trois pommiers il y a toujours un couple d'abricotiers.
- Le premier arbre de la file est un pommier, le 14e arbre est un abricotier, le 10e et le 21e arbre sont des cerisiers. Il y a moins de 10 cerisiers en tout.

Faites la liste des arbres fruitiers, les uns après les autres à partir du premier de la file, dans l'ordre dans lequel Monsieur Durand les a plantés.

Combien d'arbres de chaque espèce Monsieur Durand a-t-il plantés ?

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Logique : gestion de plusieurs informations simultanément, raisonnement hypothético-déductif
- Arithmétique : nombres ordinaux et cardinaux

Analyse de la tâche

- Imaginer la file des arbres plantés par Monsieur Durand et numéroter de 1 à 24 leurs places dans la file. On peut faire une représentation comme celle-ci, dans laquelle on a déjà mis à leurs places un pommier (P), un abricotier (A) et deux cerisiers (C) à partir des indications de l'énoncé :

P									C				A							C			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	**21**	22	23	24

- Déduire de la troisième information que les pommiers et les abricotiers se présentent toujours par groupes de 5 et toujours dans le même ordre : PPPAA.
- Positionner alors les 5 premiers arbres de la file dans l'ordre : 3 pommiers et 2 abricotiers.
- Comprendre que le 6e arbre, ainsi que le 7e, ne peut pas être des abricotiers (parce qu'il y en a deux placé en 4e et en 5e positions et que deux abricotiers doivent toujours être précédés de trois pommiers) et ils ne peuvent pas être des pommiers, parce qu'autrement le 9e devrait être un pommier et le 10e arbre devrait être un abricotier, en contradiction avec l'information que ce 10e arbre est un cerisier. Donc, en 6e, 7e, 8e, 9e et 10e positions, on a des cerisiers.
- Observer que le 14e arbre est un abricotier et, puisque les abricotiers sont toujours précédés de 3 pommiers, il y a trois pommiers en 11e, 12e et 13e positions et un second abricotier à la 15e place.

P	P	P	A	A	C	C	C	C	**C**	P	P	P	**A**	A						**C**			
1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	**21**	22	23	24

- Considérer qu'entre le 15e et le 21e il y a 5 arbres et qu'on a alors deux possibilités : 3 pommiers et 2 abricotiers ou bien 5 cerisiers. Exclure cette dernière possibilité parce qu'autrement il y aurait plus de 10 cerisiers. Observer enfin qu'en 22e, 23e et 24e position, il ne peut y avoir que des cerisiers.
- Conclure que la file des arbres fruitiers est la suivante, où il y a 9 pommiers, 6 abricotiers et 9 cerisiers.

P	P	P	A	A	C	C	C	C	**C**	P	P	P	**A**	A	P	P	P	A	A	**C**	C	C	C
1	2	3	4	5	6	7	8	9	**10**	11	12	13	**14**	15	16	17	18	19	20	**21**	22	23	24

Il y a évidemment d'autres procédures, par déduction ou essais, en suivant un ordre différent pour disposer les arbres.

Attribution des points

4 Suite correcte des arbres fruitiers (PPPAACCCCCPPPAAPPPAACCCC) et indication exacte du nombre d'arbres de chaque type (9 pommiers, 6 abricotiers et 9 cerisiers)

3 Une seule réponse correcte (succession des arbres ou bien nombre des arbres de chaque type)

2 Suite erronée par non respect d'une seule des conditions

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

9. CHAMPIONNAT DE MINI-KART (Cat. 5, 6, 7)

Chaque année, le championnat de mini-kart comprend sept épreuves.

Dans chaque épreuve, le vainqueur obtient 3 points, le deuxième en obtient 2 et le troisième 1 point et les autres 0.

Cette année, André et Bruno ont obtenu des points dans chacune des cinq premières épreuves et seulement dans celles-ci. Charles a obtenu des points dans quatre des cinq premières épreuves, il a gagné la sixième et n'a rien obtenu dans la septième.

André a terminé le championnat avec 13 points et Bruno avec 12.

Combien de points Charles a-t-il totalisés à la fin du championnat de cette année ?

Expliquez comment vous avez trouvé la réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : décomposition d'un nombre en somme de plusieurs termes
- Logique : gestion de plusieurs informations conjointes, raisonnement hypothético-déductif

Analyse de la tâche

- Comprendre que pour connaître le nombre de points marqués par Charles, il est essentiel de connaître les classements d'André et de Bruno dans les 5 premières épreuves où ils ont marqué des points.
- En plus des 3 points obtenus dans la sixième épreuve, Charles en a obtenu d'autres, dans 4 des 5 premières épreuves. Se rendre alors compte que la première tâche est de chercher les répartitions des points obtenus par André et Bruno dans les 5 premières épreuves, après cela, on pourra déterminer les points obtenus par Charles.
- Il y a deux manières de procéder : s'intéresser à la répartition globale des points d'André et de Bruno ou bien entrer dans le détail de chacun d'eux.
  - Globalement, il y a 6 (1 + 2 + 3) points à repartir par épreuve, c'est-à-dire 30 points pour les 5 premières. André et Bruno en ont pris 25 (13 + 12) en tout. Puisque 25 = 5 × (3 + 2), les 5 points « 2 » et les 5 points « 3 » ont été pris, il reste seulement les 5 points « 1 » pour Charles, qui en prend donc 4.
  - Individuellement : André a obtenu 13 points qu'il est possible d'obtenir de deux manières différentes comme somme de 5 termes 1, 2 ou 3 : 13 = 3 + 3 + 3 + 3 + 1 (avec 4 termes « 3 ») ou 13 = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 (avec 3 termes « 3 ») ;
  - Bruno a obtenu 12 points de deux manières possibles : 12 = 3 + 3 + 3 + 2 + 1 (avec 3 termes « 3 ») ou 12 = 3 + 3 + 2 + 2 + 2 (avec 2 termes « 3 »). Parmi toutes ces possibilités, seul le couple de répartitions 13 = 3 + 3 + 3 + 2 + 2 pour André et 12 = 3 + 3 + 2 + 2 + 2 pour Bruno contient les 5 termes « 3 » disponibles.
  - Pour Charles, il ne reste que les « 1 ». Dans les 5 premières épreuves, Charles a donc obtenu 4 fois 1 point, donc 4 points.
- Conclure qu'à la fin du championnat, Charles a obtenu 7 (4 + 3) points.

Attribution des points

4 Réponse correcte (7 points) avec explication claire (calculs, tableaux ou schémas qui permettent de mettre en évidence qu'il n'y a qu'une solution compatible avec les données)

3 Réponse correcte mais avec une explication incomplète

2 Réponse correcte mais sans explication

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 5, 6, 7

Origine : Siena

10. LANCERS FRANCS AU BASKET (Cat. 6, 7)

Luc, qui joue au basket, s'entraîne aux lancers francs.
Le premier jour, il a réussi 18 paniers et en a manqué 7.
Le deuxième jour, il a réussi 20 paniers et en a manqué 8.
Le troisième jour, il a réussi 25 paniers et en a manqué 10.

Quel jour Luc a-t-il été le plus adroit au lancer franc ?

Y a-t-il des jours où Luc a eu la même adresse ?

Explíquez pourquoi.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : division, proportionnalité

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il faut tenir compte à la fois des paniers réussis et des paniers manqués et qu'il faut choisir le type de relation adéquat entre ces deux grandeurs.
- Comprendre que les réussites dans ces « lancers francs » sont mesurées par des rapports ou des pourcentages et non des différences.
- Considérer les six données pour Luc et les comparer :

jours	I	II	III
tirs réussis	18	20	25
tirs manqués	7	8	10

  - exemple, certains élèves observent les différences entre les deux ligne : 11, 12 et 15 et pensent que c'est au troisième jour que Luc a été le plus adroit (ce qui montre que la notion de proportionnalité n'est pas encore acquise).
  - D'autres observent les différences entre les deux premiers jours et pensent que Luc a été plus adroit le deuxième car il a 2 réussites de plus et seulement 1 tir manqué de plus : raisonnement faux.
- Comprendre que la réponse correcte consiste à comparer des rapport du type a / b (paniers réussis / tirs à côté) ou a / (a + b) (paniers réussis sur nombre d'essais).
- Calculer que le premier jour Luc a une réussite de 18 paniers pour 7 tirs à côté (18/7 = 2,57), le deuxième jour 20 réussis pour 8 à côté (20/8 ≈ 2,5) et le troisième jour 25 réussis pour 10 à côté (25/10 = 2,5).

Ou bien, calculer que le premier jour Luc a une réussite de 18 paniers sur 25 (18/25 ≈ 0,72), le deuxième jour 20 sur 28 (≈ 0,71) et le troisième jour 25 sur 35 (≈ 0,71).

- Conclure que Luc a été le plus adroit le premier jour et qu'il a eu la même adresse le deuxième et le troisième jour.

Attribution des points

4 Réponses exactes (premier jour ; même adresse pour les deuxième et troisième jours) avec une explication complète montrant la comparaison de rapports, quel que soit le rapport utilisé

3 Réponses exactes aux deux questions avec une explication peu claire mais avec des calculs de rapports

2 Réponse exacte aux deux questions sans explication
ou réponse fausse suite à une erreur de calcul mais avec un raisonnement correct

1 Réponse erronée ou absente, mais avec une partie des calculs montrant une considération de proportionnalité

0 Réponse erronée avec un raisonnement par différences dans un cadre additif,
ou incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7

Origine : Groupe Proportionnalité

11. LES ABRICOTS (Cat. 6, 7, 8)

Un groupe d'enfants a récolté un beau panier d'abricots.
Les enfants décident de se partager ces fruits et remarquent que :
- s'ils en prennent trois chacun, il restera deux abricots dans le panier,
- mais il manque cinq abricots pour qu'ils puissent en prendre quatre chacun.

Combien y a-t-il d'enfants ?

Combien d'abricots ont-ils récolté ?

Expliquez comment vous avez trouvé vos réponses.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : les quatre opérations et en particulier la division avec reste
- Algèbre : équations du premier degré

Analyse de la tâche

- S'approprier les données des deux distributions présentées dans l'énoncé : celle de 3 par personne avec un reste de 2 ; celle de 4 par personne, qui n'est pas possible car il manque 5 abricots. Établir des relations entre les nombres donnés (multiples de 3 et de 4, additions ou soustraction du reste ou du « manque ») Comprendre que le problème est de trouver un même nombre d'abricots et un même nombre d'enfants qui vérifient les deux distributions.
- Une procédure consiste à évoquer une distribution effective, dans l'ordre chronologique : chaque enfant prend un abricot à tour de rôle, puis un deuxième, puis un troisième ; les 2 abricots qui restent permettent au 1er et au 2e enfant d'en prendre un quatrième ; le troisième, le quatrième et les suivants ne peuvent pas le faire car il n'y a plus d'abricots mais avec les 5 abricots fictifs (qui manquent), le 3e, le 4e, le 5e, le 6e et le 7e enfant pourraient aussi avoir 4 abricots. Un simple comptage permet ainsi de déterminer qu'il y a 7 enfants et 23 abricots : $23 = (7 \times 3) + 2 = (7 \times 4) - 5$. (Cette stratégie « élémentaire » suppose toutefois qu'on laisse inconnu le nombre d'enfants tout au long de la distribution, qui n'apparaîtra qu'à la fin du processus fictif).

Ou, pour ceux qui ont perçu les multiples successifs du nombre d'enfants, constater que le nombre d'abricots se situe à 2 unités au-delà du 3e mais à 5 unités avant le 4e, représentant un écart de 7 entre ces deux multiples.

Ou bien, procéder à des essais en choisissant un nombre d'enfants, en calculant le nombre d'abricots pour chaque distribution et en vérifiant que ces deux résultats sont égaux.

Par exemple avec 10 enfants, il y aurait $32 = (10 \times 3) + 2$ abricots pour la première, mais $35 = (10 \times 4) - 5$ pour la seconde ; il faut rejeter l'essai et en tenter un autre.

Après une ou plusieurs tentatives, ces essais peuvent être organisés par exemple selon un nombre croissant d'enfants.

nb d'enfants (E)	2	3	4	5	6	**7**	8	9	10	11
3E + 2	8	11	14	17	20	**23**	26	29	32	35
4E – 5	3	7	11	15	19	**23**	27	31	35	39

(Les essais ci-dessus sont présentés sous forme « complète » ou « experte » avec la maîtrise des caractéristiques « un multiple de 3 plus 2 » et « 5 de moins qu'un multiple de 4 ». Ils permettent de se convaincre de l'unicité de la solution « 7 enfants, 23 abricots ». Les productions des élèves sont en général moins « régulières » ou exhaustives et elles peuvent laisser planer des incertitudes sur la part du hasard dans la recherche de la solution.

Ou encore : partir des nombres d'abricots possibles pour chacune des distributions et les identifier. Les deux listes des nombres qui valent 2 de plus qu'un multiple de 3 (5, 8, 11, 14, 17, 20, 23, 26, 29, 32, 35, …) et/ou 5 de moins qu'un multiple de 4 (3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35, …) se situent cette fois-ci au début de la procédure de résolution (alors que dans la procédure précédente, elles en étaient l'aboutissement). On y trouve des nombres communs : 11, 23, 35, … La tâche est de vérifier pour chacun de ces « candidats », celui qui donne le même nombre d'enfants :

11 abricots ; $11 = (3 \times 3) + 2 = (4 \times 4) - 5$ (3 enfants et 4 enfants) solution à écarter

23 abricots : $23 = (7 \times 3) + 2 = (7 \times 4) - 5$ (7 enfants dans les deux cas) solution à retenir

35 abricots ; $35 = (11 \times 3) + 2 = (10 \times 4) - 5$ (11 enfants et 10 enfants) solution à écarter

… avec l'assurance que 23 est le seul nombre d'abricots à retenir.

Ou : s'aider de schémas, de tableaux ou de dessins pour représenter les parts de chacun selon l'une ou l'autre des procédures précédentes sans toutefois pouvoir décrire le raisonnement ou aller au-delà d'une vérification.

Ou bien, utiliser des lettres pour formaliser les relations entre les données du problème. Par exemple en notant A le nombre d'abricots et E celui des enfants pour chacune des deux distributions, on a : $A = 3E + 2$ et $A = 4E - 5$. On obtient donc l'équation $3E + 2 = 4E - 5$, la résoudre par essais ou de manière algébrique : $E - 7 = 0$, d'où $A = 3 \times 7 + 2 = 23$.

Attribution des points

4 La solution complète (7 enfants et 23 abricots) avec explication permettant de constater que la solution est unique

3 La solution complète (7 enfants et 23 abricots) avec vérification ou dessins ne permettant pas de savoir si la solution est obtenue au hasard ou que les possibilités ont toutes été envisagées

2 La solution complète (7 enfants et 23 abricots) sans explication ni vérification
ou seulement une des deux réponses avec des explications

1 Réponse qui donne le même nombre pour les deux distributions pour seulement le nombre d'abricots ou seulement celui des enfants (ex. : 11 abricots ; $11 = (3 \times 3) + 2 = (4 \times 4) - 5$)

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

Origine : Variante de 20.I.5 *Collection de motos* (Groupe Opérations)

12. NOUVEAUX FEUTRES (Cat. 6, 7, 8)

La directrice d'une école maternelle a commandé des stylos feutres pour l'année scolaire 2012 - 2013. La société qui les fabrique les emballe dans des petites boîtes qui contiennent chacune huit feutres.
Pour expédier le matériel à l'école, l'employé qui prépare les commandes utilise :

- des boîtes de taille moyenne, qui peuvent contenir exactement 8 petites boîtes,
- des grandes boîtes, qui peuvent contenir exactement 8 boîtes moyennes ;

puis il procède de la façon suivante : quand il a rempli 8 petites boîtes, il les place dans une boîte moyenne, et quand il a rempli 8 boîtes moyennes, il les met dans une grande boîte, puis il recommence avec les feutres qui restent.
L'employé constate qu'entre tous les modèles de boîtes, petites, moyennes et grandes, il a utilisé en tout 85 boîtes pour préparer la commande pour l'école et que toutes les boîtes sont complètement remplies.

Combien de stylos la directrice de l'école a-t-elle commandés ?

Précisez le nombre de boîtes de chaque taille (petites, moyennes et grandes), qui ont été utilisées.

Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : groupement, multiples, puissances

Analyse de la tâche

- Comprendre que le nombre de stylos feutres est un multiple de 8 car toutes les boîtes sont pleines et qu'il n'y a pas de feutres en dehors des boîtes.
- Comprendre qu'à chaque groupement de 8 feutres correspond une petite boîte (PB), à chaque groupement de 8 PB une boîte moyenne, (MB) et à chaque groupement de 8 MB correspond une grande boîte (GB).
- Simuler le processus de réalisation de la commande et se rendre compte que :
  quand on a rempli une boîte moyenne, on a utilisé 9 boîtes (8PB+1MB) et 64 (8×8) feutres,
  quand on a rempli une grande boîte, on a utilisé 73 boîtes (64 PB + 8 MB + 1 GB) et 512 (64×8) feutres,
- En déduire qu'après avoir rempli une grande boîte, il reste encore 12 (85 – 73) boîtes à remplir et donc que le nombre de feutres est supérieur à 512.
- Constater qu'on peut encore remplir une boîte moyenne, ce qui nécessite 9 boîtes (8PB+1MB) et 64 feutres.
  On obtient un total de 82 boîtes utilisées (73 + 9) et 576 feutres (512 + 64).
- Déduire qu'il manque encore 3 petites boîtes, car le nombre de boîtes manquantes est inférieur à 8, ce qui correspond à 24 (3 × 8) feutres.
- Conclure que le nombre de feutres commandés est égal à 600 (512 + 64 + 24) et que le nombre de petites boîtes est égal à 64 + 8 + 3 = 75, le nombre de boîtes moyennes à 8 + 1 = 9 et qu'il n'y a qu'une grande boîte.

Ou bien, calculer d'abord le nombre de boîtes de chaque type puis le nombre de feutres au total (75 × 8 = 600).

Attribution des points

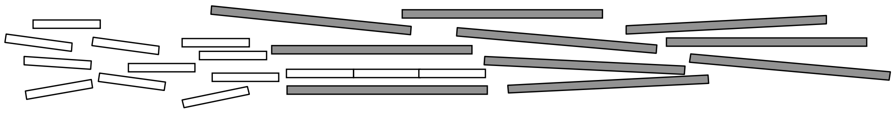
4 Réponse correcte et complète (600 feutres ; 1 GB, 9 MB, 75 PB) avec des explications claires et complètes
3 Réponse correcte et complète avec des explications peu claires ou une vérification seulement
2 Réponse correcte et complète sans aucune explication
ou démarche correcte et bien expliquée mais la réponse à une des deux questions n'est pas donnée
ou une réponse qui indique le nombre correct de feutres (600), mais seulement le nombre des boîtes « extérieures » (1 GB, 1 MB, 3 PB)
ou précédure correcte mais avec une erreur de calcul
1 Début de raisonnement correct
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 6, 7, 8

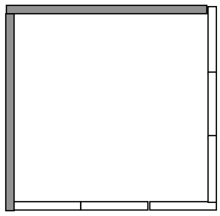
Origine : Siena

13. LES CARRÉS D'ANTOINE (II) (Cat. 7, 8)

Antoine a 24 bâtons : 10 sont gris et 14 sont blancs. Les bâtons de la même couleur ont la même longueur. La longueur des bâtons gris est le triple de celle des bâtons blancs.



Antoine s'amuse à construire des carrés avec ses bâtons.
En voici un :



En utilisant le plus grand nombre possible de ses bâtons, Antoine a construit deux carrés ayant le même périmètre et il les regarde, satisfait.

Combien de bâtons Antoine a-t-il utilisés au total ?

Dessinez les deux carrés en mettant en évidence les bâtons utilisés.

Expliquez comment vous avez trouvé la solution.

ANALYSE A PRIORI

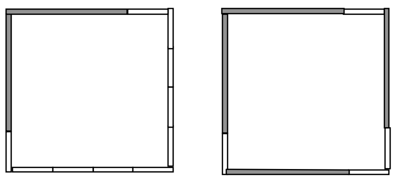
Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations
- Géométrie : mesure, côté et périmètre du carré

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'en prenant comme unité de longueur celle d'un bâton blanc, il y a 14 bâtons de longueur 1 et de 10 de longueur 3.
- Se rendre compte qu'avec cette unité, la somme des longueurs de tous les bâtons est 44. ($1 \times 14 + 10 \times 3 = 44$).
- Remarquer que la longueur du périmètre d'un carré ainsi construit est un multiple de 4.
- Exclure qu'on puisse construire deux carrés de périmètre 22 unités parce que 22 n'est pas divisible par 4.
- Exclure aussi qu'on puisse construire deux carrés de périmètre 20 unités parce qu'un côté de longueur 5 nécessite un bâton de longueur 3 et 2 de longueur 1, mais on n'a pas assez de bâtons de longueur 1 pour compléter tous les côtés (au minimum il en faudrait 16).
- Exclure qu'on puisse construire deux carrés de périmètre 18 unités parce que 18 n'est pas divisible par 4.
- Essayer avec deux carrés de périmètre 16 unités en utilisant 8 bâtons longs et 8 courts, ou bien 7 bâtons longs et 11 courts, ou bien 6 bâtons longs et 14 courts.

  Comprendre que cette dernière solution est celle qui permet d'utiliser le plus grand nombre possible de bâtons, soit 20 au total.



Ou bien, dessiner d'une façon non systématique des carrés et trouver des solutions qui ne garantissent pas la solution optimale.

Attribution des points

4 Réponse correcte (20 bâtons et dessin des deux carrés demandés dans lequel les différents bâtons sont bien mis en évidence) avec explication claire de la procédure suivie qui mette en évidence qu'on a bien la solution optimale

3 Réponse correcte (20 bâtons et dessin des deux carrés demandés dans lequel les différents bâtons sont bien mis en évidence) avec une explication qui ne mets pas en évidence qu'on a obtenu la solution optimale

2 Réponse correcte sans explication

1 Dessin de deux carrés de même périmètre, mais pas optimaux

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8

Origine : Campobasso

14. QUI SUIS-JE ? (Cat. 7, 8, 9, 10)

Je suis un nombre.
Si on me multiplie par 100, je deviens un nombre entier naturel compris entre 300 et 500.
Si on me multiplie par 10, je deviens la moitié d'un nombre entier, mais pas un nombre entier.
Si on me divise par 5, deux de mes chiffres ne changent pas de position.

Qui suis-je ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Nombres décimaux, calcul avec des décimaux.

Analyse de la tâche

- Comprendre la situation, en particulier les types de calculs et les types de nombres obtenus.
- Procéder d'abord par déduction :

  la première information indique que le nombre cherché est situé entre 3 et 5 ;

  la seconde information indique :

  - que le nombre cherché n'est pas un nombre entier (ce qui exclut la réponse 4),

  - qu'en reprenant la première information, c'est un décimal ayant 3 ou 4 pour partie entière, avec un ou deux chiffres à droite de la virgule,

  - que 10 fois le nombre cherché est de la forme ■,5 (ce qui signifie que le nombre cherché a 5 comme chiffre des centièmes).

  On sait donc maintenant qu'on cherche un nombre de la forme 3,d5 ou 4,d5.

  Si on le divise par 5, le chiffre des unités du quotient ne peut être que 0. Ce sont donc les chiffres d et 5, qui constituent la partie décimale de ce quotient, qui ne changent pas. 0,d5 sera donc le résultat de la division du nombre cherché par 5. Énumérer les 20 possibilités (3,05 - 3,15 - 3, 25 -… - 4,95) et essayer de les diviser par 5 pour voir si la troisième condition est satisfaite. Trouver la solution 3,75.

- Ou bien, considérer que le nombre à déterminer étant de la forme 3,d5 ou 4,d5, le nombre des dixièmes est 30 + d ou 40 + d, et puisque le résultat de la division par 5 est de la forme 0,d5, que ce nombre de dixièmes doit être égal à 5d + 2 (obtenu en multipliant 0,d5 par 5).

  Dans le premier cas, trouver que d = 7, en travaillant sur les multiples de 5 supérieurs à 30 ou en résolvant l'équation 5d + 2 = 30 + d.

  Vérifier par contre que dans le second cas, il n'existe pas de valeur entière pour d qui satisfasse l'égalité 5d + 2 = 40 + d. Conclure que le nombre cherché est 3,75.

Attribution des points :

4 Réponse correcte (3,75) avec explication de l'unicité et vérification des conditions

3 Réponse correcte (3,75) sans explication de l'unicité et vérification des conditions

2 Proposition d'exemples vérifiant deux des conditions et essai de vérification de la 3^{e}

1 Proposition d'exemples vérifiant une des conditions et essai de vérification d'au moins une autre condition

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 7, 8, 9, 10

Origine : Bourg en Bresse

15. DES BONBONNIÈRES AUX INVITÉS (Cat. 8, 9, 10)

Charlotte et Luc organisent leur mariage. Ils ont acheté des jolies petites bonbonnières et des dragées. Ils donneront une bonbonnière avec des dragées à chacun des invités.

Luc dit : « *Si je mettais dix dragées dans chaque bonbonnière, j'utiliserais toutes les dragées mais je ne pourrais pas remplir toutes les bonbonnières* ».

Charlotte dit : « *Mettons alors 7 dragées par bonbonnière. Ainsi, on peut les remplir toutes et il restera deux dragées, une pour toi et une pour moi !* ».

Luc soupire : « *Le nombre de tes invités est important, ils sont plus d'une centaine. Moi j'en ai exactement la moitié des tiens... Heureusement, au total, ils sont moins de 200 !* ».

Combien y a-t-il d'invités, au total ? Combien Charlotte et Luc ont-ils chacun d'invités ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Arithmétique : opérations, multiples et critère de divisibilité

Analyse de la tâche

- Comprendre que l'énoncé pose les conditions suivantes :
  - le nombre total de dragées est un multiple de 10, qui, diminué de 2 (dragées pour les mariés), devient un nombre qui est aussi multiple de 7 ;
  - le nombre des invités de Luc est exactement la moitié de ceux de Charlotte, donc le nombre de ceux de Charlotte doit être un nombre pair supérieur à 100.
- Déduire des informations précédentes que :
  - les invités de Luc sont 1/3 du total et ceux de Charlotte les 2/3, le nombre des invités est donc un multiple de 3 ;
  - le nombre total des invités est supérieur à 150 et inférieur à 200, et en particulier, celui des invités de Luc est supérieur à 50 et inférieur à 66 ;
  - le nombre de dragées a 8 pour chiffre des unités ;

    le nombre d'invités multiplié par 7 plus 2 correspond au nombre total de dragées.
- Faire une liste des nombres d'invités possibles, en partant de 153 jusqu'à 198 (153, 156, 159, 162, 165, 168, 171, 174, 177, 180, 183, 186, 189, 192, 195, 198), puis chercher parmi ces nombres ceux qui multipliés par 7 donnent un nombre qui a 8 pour chiffre des unités et se rendre compte que le seul qui répond à cette exigence est 174.
- Diviser 174 par 3 pour obtenir le nombre des invités de Luc (58) et multiplier le nombre des invités de Luc par 2 pour obtenir celui des invités de Charlotte (116).

Ou bien, sur la base des déductions précédentes, considérer que le nombre des bonbonnières est le triple de celui des invités de Luc, que le nombre total des dragées est le triple de ce que les invités de Luc recevront et par conséquent que ce nombre est multiple de 3 et de 7 (nombre de dragées par bonbonnière), c'est-à-dire de 21. Chercher parmi les nombres entiers compris entre 50 et 66 un nombre qui, multiplié par 21, donne un résultat qui ait 8 comme chiffre des unités. Constater que l'unique possibilité est 58. Conclure que les invités de Luc sont 58, ceux de Charlotte sont 116, pour un total de 174.

Ou bien, organiser la recherche, en prenant en compte les nombres pairs supérieurs à 100 selon le tableau suivant :

Nombre des invités de Charlotte	Nombre des invités de Luc	Nombre total d'invités	Nombre total de bonbonnières	(Est-il multiple de 10 ?)
102	51	153	(153 x 7) + 2 = 1073	NON
104	52	156	(156 x 7) + 2 = 1094	NON
106	53	159	(159 x 7) + 2 = 1115	NON
108	54	162	(162 x 7) + 2 = 1136	NON
…	…	…	…	
116	58	174	(174 x 7) + 2 = 1220	OUI

- En complétant la recherche pour vérifier l'unicité de la solution, on constate que le dernier nombre acceptable est 132, en effet : 132 + 66 = 198 ; avec le nombre successif on obtient 134 + 67 = 201 ;
- En multipliant le nombre total des invitées par 7 et en ajoutant 2, on vérifie l'existence d'une seule solution possible: 116 + (116: 2) = 174; 174 x 7 + 2 = 1220, ce qui est un multiple de 10.
- Formuler la réponse correcte: « il y a 174 invités au total, Charlotte en a 116 et Luc 58 ».

Ou bien, procéder par tâtonnements plus ou moins organisés. Dans ce cas, il est possible d'arriver à la solution, sans être en mesure d'en vérifier l'unicité.

Attribution des points

4 Réponses correctes (174 invités, 116 pour Charlotte, 58 pour Luc) avec explication complète et les détails des calculs, soulignant l'unicité de la solution

3 Réponses correctes avec explication incomplète
ou bien deux réponses justes sur les trois, avec une explication qui montre l'unicité de la solution

2 Réponses correctes, sans aucune explication
ou, démarche correcte, mais réponse incorrecte seulement en raison d'une erreur de calcul

1 Tentatives qui montrent une compréhension initiale du problème
ou une seule des 3 réponses

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Rozzano

16. LA BOUTEILLE D'HUILE (Cat. 8, 9, 10)

Pour célébrer les vingt ans d'activité de la coopérative qui vend l'huile de Transalpie, on a réalisé un nombre limité de bouteilles d'un litre d'une forme particulière, illustrée par la figure ci-contre.

Jean, qui a pu en acheter une, raconte à un de ses amis :

« Il s'agissait d'une bouteille magnifique avec une base plate et circulaire. Je ne me souviens plus de sa hauteur. Par contre je me rappelle que :

- après avoir consommé un quart de litre, j'ai remarqué que le niveau de l'huile était à 15 cm de la base dans la zone cylindrique ;

- après avoir consommé un demi-litre, j'ai retourné la bouteille et je me suis aperçu que le niveau de l'huile était à 15 cm du bouchon. »

Avec ces informations, déterminez la hauteur de la bouteille.

Expliquez votre raisonnement.

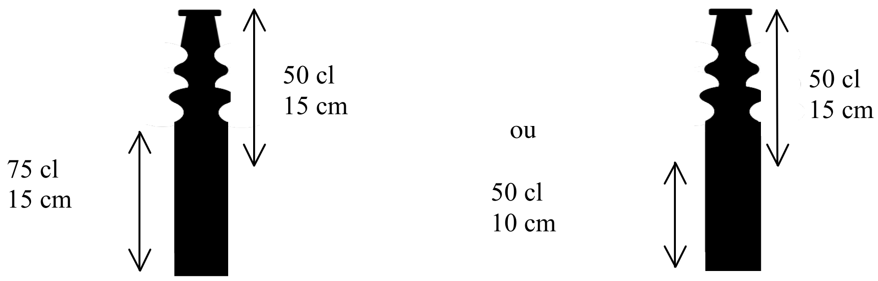
ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie dans l'espace : volume. Conservation du volume d'un liquide quelle que soit la position du récipient
- Arithmétique : proportionnalité

Analyse de la tâche

- Se rendre compte que le volume d'huile dans la partie cylindrique ne dépend que de sa hauteur.
- En déduire, d'après la première mesure de Jean, que ¾ de litre (75 cl) occupent 15 cm de hauteur dans la partie cylindrique.
- Par un raisonnement de proportionnalité, on obtient que dans la partie cylindrique, dans 1 cm de hauteur, il y a un volume d'huile de 75/15 = 5 cl, ou que 15 cm correspond à 3 quarts et 5 cm à 1 quart.
- En déduire que dans la partie cylindrique, ½ litre d'huile (50 cl) occupe une hauteur de 50 / 5 = 10 cm.
- D'après la seconde affirmation, on sait qu'à partir du bouchon, une hauteur de 15 cm contient ½ litre d'huile et par conséquent lorsqu'on retourne la bouteille avec 0,5 litres le niveau d'huile (de 15 cm à partir du bouchon) est dans la partie cylindrique. Ainsi les deux niveaux se chevauchent dans la partie cylindrique.
- Visualiser ces données par des schémas tels que ceux-ci :



- Constater sur le premier schéma qu'en additionnant les deux hauteurs de 15 cm, on compte deux fois ¼ de litre d'huile, correspondant à 5 cm de hauteur. En déduire que la bouteille a une hauteur de 15 + 15 – 5 = 25 cm.

Ou bien, constater sur le deuxième schéma que la hauteur de la bouteille est 10 + 15 = 25 cm.

Ou bien, comprendre que la clé du problème est que lorsqu'on renverse la bouteille, la moitié de l'huile se trouve à 15 cm du haut et l'autre moitié à 10 cm du bas, d'où la hauteur totale de la bouteille égale à 25 cm.

Attribution des points

4 Réponse correcte (25 cm) avec des explications claires et le détail des calculs

3 Réponse correcte avec des explications peu claires, ou présentation claire de la procédure mais avec une seule erreur de calcul donnant une valeur différente de 25 cm

2 Réponse correcte sans explications
ou des erreurs de calculs mais une procédure correcte

1 Début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Cagliari et Sassari

17. LE MARATHON DE TRANSLAPIE 2013 (Cat. 8, 9, 10)

Cette année encore Michel et Philippe ont décidé de s'inscrire au Marathon de Transalpie et viennent de recevoir leurs numéros de dossards. Ces nombres sont supérieurs à 100 et inférieurs à 1000. Michel dit à Philippe :

« *Regarde comme c'est curieux :*

- *Les chiffres du nombre écrit sur mon dossard sont tous différents de ceux du nombre écrit sur ton dossard, mais leur somme est 9, comme pour le tien.*
- *Le nombre écrit sur mon dossard est le triple du nombre écrit sur le tien.* »

Quels peuvent être les numéros des dossards de Michel et Philippe ?

Expliquez comment vous les avez trouvés.

ANALYSE A PRIORI

Domaine de connaissances

- Numération : distinction chiffre et nombre, ordre
- Arithmétique : addition, critère de divisibilité par 9

Analyse de la tâche

- Comprendre que la seconde information (un nombre triple de l'autre) permet d'exclure, pour le dossard de Philippe, tous les nombres qui, multipliés par 3 donnent un nombre supérieur à 999. Donc les nombres possibles pour Philippe doivent être recherchés parmi ceux qui sont supérieurs à 100 et inférieurs à 334.
- Se rendre compte qu'il est possible de réduire la recherche des nombres possibles pour Philippe en se limitant à l'étude de ceux dont la somme des chiffres est 9 (donc divisibles par 9) :

  108, 117, 126, 135, 144, 153, 162, 171, 180, **207**, 216, 225, 234, 243, 252, 261, 270, **306,** 315, 324, 333.

  Par conséquent les nombres possibles pour Michel s'obtiennent en multipliant les précédents par 3 :

  324, 351, 378, 405, 432, 459, 486, 513, 540, **621**, 648, 675, 702, 729, 756, 783, 810, **918**, 945, 972, 999
- Retenir ceux dont la somme des chiffres est égale à 9. Il reste :

  324, 351, 405, 432, 513, 540, **621**, 702, 810 pour Michel, et par conséquent :

  108, 117, 135, 144, 171, 180, **207**, 234, 270 pour Philippe
- Le fait que les chiffres des deux nombres doivent être différents permet de conclure que les seuls numéros de dossards possibles sont **108** pour Philippe et **324** pour Michel.

Ou bien, se rendre compte que les deux nombres sont des multiples de 9 (la somme de leurs chiffres est 9) et en particulier le nombre de Michel est un multiple de 27. Considérer alors les multiples de 27 entre 300 et 1000 et dont la somme des chiffres est égale à 9 :

324, 351, 405, 432, 513, 540, 621, 702, 810 et vérifier comme ci-dessus que seulement $324 = 27 \times 12$ est le seul qui convient pour Michel.

Ou engager des essais inorganisés pour déterminer les deux numéros de dossards, mais cette démarche laborieuse ne permet pas de conclure à l'unicité de la solution.

Attribution des points

4 Réponses correctes (108-324) avec explication claire qui montre l'unicité de la solution

3 Réponses correctes (108-324) mais explication peu claire ou qui ne montre pas l'exhaustivité de la recherche ou seulement avec une vérification

2 Réponses correctes sans explication
ou réponses correctes et une autre solution incorrecte due à un erreur de calcul mais avec raisonnement correct

1 Une seule des deux réponses
ou début de raisonnement correct

0 Incompréhension du problème

Niveaux : 8, 9, 10

Origine : Siena

18. LES QUATRE PIQUETS (Cat. 9, 10)

Dans une prairie, quatre amis plantent chacun un piquet.
Antoine plante le sien en premier.
Puis Bernard plante le sien, à 41 m de celui d'Antoine.
Clara plante alors le sien à 41 m de chacun des deux précédents.
Finalement, Danielle plante le sien, à 41 m de celui de Clara, mais à 71 m de celui de Bernard.
Elle dit alors : « *Quand je me place juste devant mon piquet et que je regarde celui de Clara, je remarque qu'il cache celui d'Antoine* ».
Ses camarades viennent vérifier et discutent :
Antoine : « *Je ne suis pas sûr* » !
Bernard : « *Je pense qu'avec 41 m et 71 m ce n'est pas possible* ».
Clara : « *C'est peut-être parce que mon piquet n'est pas vraiment planté droit* ».

Pouvez-vous dire si les trois piquets de Danielle, Clara et Antoine sont vraiment alignés ? Justifiez votre réponse.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Géométrie : Pythagore, comparaison de triangles rectangles, hauteur d'un triangle équilatéral
- Logique : raisonnement par l'absurde

Analyse de la tâche

- La première tâche est de faire un dessin pour comprendre comment sont situés les piquets d'Antoine (A), de Bernard (B), de Clara (C) et de Danielle (D) : percevoir le triangle équilatéral ABC, choisir l'une des deux possibilités pour le point D qui correspond à la remarque de Danielle (dans l'alignement présumé de A et C).
- Remarquer qu'un croquis ne suffit pas pour conclure et chercher éventuellement à répondre à la question par une construction géométrique soignée à l'échelle, à la règle et au compas. Constater alors que les trois points A, C, D semblent alignés et qu'on ne peut pas rigoureusement conclure par une construction avec les instruments de dessin géométrique, au vu des limites de leur précision, comme le suggèrent les commentaires des quatre amis.
- Passer alors à une analyse de la figure formée par les quatre points et de ses propriétés pour la deuxième partie de la tâche : imaginer ou dessiner les segments, observer que le triangle ABC est équilatéral de côtés 41 m, le triangle BCD est isocèle de côtés 41 m, 41 m et 71 m.

  Envisager l'un ou l'autre des cas : A, C, D sont alignés (fig. I) ou A, C, D ne sont pas alignés (fig. II)

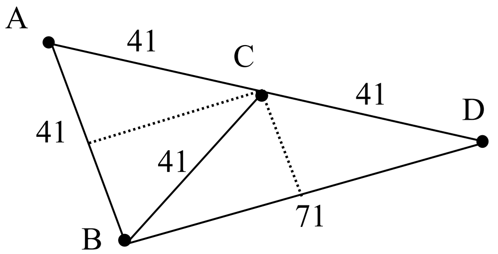


fig. I

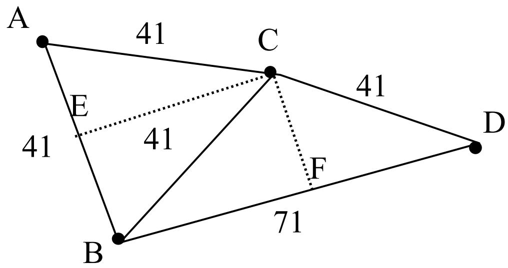


fig. II

- Si l'on suppose que A, C, D sont alignés : AD est alors un segment de longueur 82. Le triangle ABD de côtés 41, 82 et 71 est rectangle, car les trois angles du triangle ABC valent 60 degrés, l'angle de sommet C du triangle isocèle BCD vaut 120 (180 – 60) degrés et les deux angles égaux chacun 30 degrés, l'angle ABD vaut 90 (60 + 30) degrés.

  (Il y a encore d'autres manières de montrer que ce triangle est rectangle : inscrit dans un demi-cercle de rayon 41 ou décomposable en quatre triangles rectangles égaux…)

  Mais dans cette hypothèse, le théorème de Pythagore n'est pas vérifié : $41^2 + 71^2 = 6722 \neq 6724 = 82^2$. On rejette l'hypothèse que A, C, D sont alignés. Remarquons que l'hypoténuse AD mesurerait 81,9878 m, à l'échelle 1/100 du dessin géométrique, la différence à repérer est de 1/10è de mm, invisible à l'oeil nu.

Ou bien, dans le second cas, on montre que A, C, D ne sont pas alignés (fig II) : les deux triangles ACE et CDF ne sont pas égaux car leurs autres côtés sont respectivement différents :

Dans ACE : AE = 41/2 = 20,5 et EC = $20{,}5\sqrt{3} \approx 35{,}507$

Dans CDF : CF = $\sqrt{41^2 - 30{,}5^2} = \sqrt{420{,}75} \approx 20{,}51$ et FD = 71/2 = 30,50

Les deux triangles n'étant pas égaux, bien qu'ils soient rectangles et de même hypoténuse (41), leurs angles aigus sont respectivement différents, ainsi l'angle en C du triangle CDF est différent de l'angle en A de ACE (60°), donc l'angle en C du triangle isocèle BCD est différent de 120°, ajouté à l'angle en C de ABC (60°) cela donne un angle différent de 180° et par conséquent A, C, D ne sont pas alignés.

Attribution des points

4 Réponse correcte (non, ils ne sont pas alignés) avec une justification « théorique » géométriquement correcte (on ne pénalise pas les fautes d'écriture, d'unités, …)

3 Réponse correcte avec justification peu rigoureuse ou avec un chaînon manquant (par exemple dans le premier cas, on ne démontre pas que le triangle ABD considéré est rectangle, mais seulement qu'il ne vérifie pas Pythagore)

2 Réponse correcte avec explications à partir de propriétés de la figure, mais inadéquates ou insuffisantes (par exemple seulement la reconnaissance du triangle équilatéral et du triangle isocèle)

ou réponse fondée sur une construction très précise avec les instruments de dessin géométrique, et cohérente (on accepte « oui » ou « non » pour autant que le dessin soit précis, que l'échelle soit indiquée) (avec les mesures de l'énoncé, un dessin ne permet pas d'être sûr de la réponse)

1 Réponse (correcte ou non) fondée seulement sur une construction géométrique approximative

0 Réponse (correcte ou non) sans explications

ou incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : 19.II.16 *Rencontre dans le parc »,* fj et groupe géométrie plane

19. L'ASCENSEUR (Cat. 9, 10)

Deux amis, Louise et Georges, sont dans un bâtiment constitué de cinq étages et d'un sous-sol, desservis par deux ascenseurs allant à la même vitesse, mais qui fonctionnent indépendamment l'un de l'autre. Louise se trouve au deuxième étage et Georges au troisième. Les deux amis appellent simultanément un ascenseur, Louise celui de gauche et Georges celui de droite. Au moment de l'appel, les deux ascenseurs sont à l'arrêt et aucun des deux ne se trouve à l'étage de son appel.

Lequel des deux amis a le plus de chances de voir arriver « son » ascenseur en premier ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

Domaines de connaissances

- Combinatoire : analyse de cas, dénombrements, notion de probabilité

Analyse de la tâche

- Comprendre qu'il y a au départ 6 positions possibles pour l'ascenseur de Louise (toutes celles de la première colonne du tableau sans la position 2) et 6 pour celui de Georges (non comprise la position 3) : cela donne 36 possibilités pour les positions initiales des deux ascenseurs.

étage	Louise	Georges
5		
4		
3		
2		
1		
0		
-1		

- Se rendre compte que dans certains cas, l'ascenseur de Louise arrivera d'abord, dans d'autres cas celui de Georges sera le premier et dans les autres, les deux ascenseurs arriveront en même temps.
- Décrire la situation finale dans chacune des 36 possibilités en s'aidant, par exemple, d'un tableau comme ci-dessous (on note L(5) ou G(5) pour dire que l'ascenseur de Louise ou, respectivement, celui de Georges est au cinquième étage). Selon la position initiale de l'ascenseur de Louise, on associe celles de celui de Georges qui font gagner Louise, respectivement Georges, respectivement donnent l'égalité.

étage	Louise gagne si	Georges gagne si	Égalité si
L(5)	G(-1)	G(5), G(4), G(2), G(1)	G(0)
L(4)	G(0), G(-1)	G(4), G(2)	G(5), G(1)
L(3)	G(5), G(1), G(0), G(-1)		G(4), G(2)
L(2)			
L(1)	G(5), G(1), G(0), G(-1)		G(4), G(2)
L(0)	G(0), G(-1)	G(4), G(2)	G(5), G(1)
L(-1)	G(-1)	G(5), G(4), G(2), G(1)	G(0)

- Constater que sur 36 cas possibles, 14 sont favorables à Louise, 12 à Georges et 10 donnent l'égalité.
- En supposant que les 36 positions possibles des ascenseurs ont la même chance d'être réalisées, conclure que Louise a plus de chances que Georges de voir arriver son ascenseur en premier.

Ou, en calculant la distance moyenne nécessaire à l'ascenseur pour arriver au bon étage. Pour chaque ascenseur il y 6 étages possibles :

étage	distance jusqu'à Louise (en nombre d'étages)	distance jusqu'à Georges (en nombre d'étages)
5	3	2
4	2	1
3	1	0
2	0	1
1	1	2
0	2	3
-1	3	4

- distance moyenne pour l'ascenseur de Louise : (3+2+1+1 +2+3) :6 = 12 :6 = 2
- distance moyenne pour l'ascenseur de Georges: (2+1+1 +2+3+4) :6 = 13 :6 = 2,1666…
- donc en moyenne l'ascenseur de Louise est plus rapide

Attribution des points

4 Réponse correcte (Louise) et bien argumentée
3 Réponse correcte avec une explication peu claire
2 Réponse avec une erreur de dénombrement mais procédure correcte
1 Début de raisonnement correct
ou réponse « Louise », sans autre précision ni explication
0 Incompréhension du problème

Niveaux : 9, 10

Origine : Parma

20. TRIANGLES ET CERCLES (Cat. 9, 10)

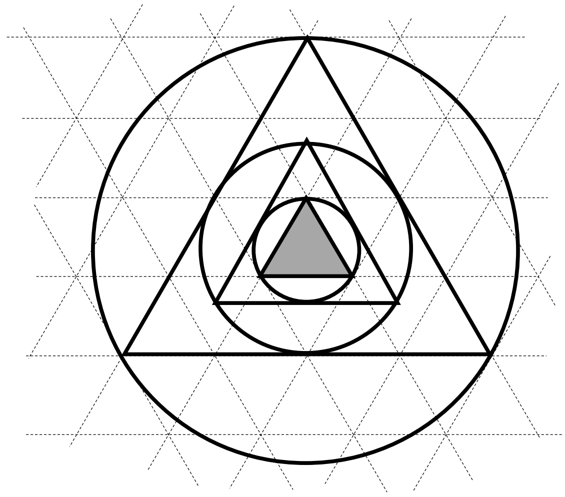
François a tracé le dessin ci-contre sur un papier à réseau triangulaire.

Il a commencé par tracer le petit triangle équilatéral gris dont les côtés mesurent 1 cm.

Ensuite, il a tracé le cercle circonscrit à ce triangle, puis un triangle équilatéral dans lequel ce cercle est inscrit.

Il a continué en traçant de même le cercle circonscrit à ce deuxième triangle puis un troisième triangle équilatéral avec son cercle circonscrit.

François aimerait poursuivre ainsi son dessin par les constructions successives de cercles et de triangles équilatéraux concentriques.



Quelle serait la mesure des côtés du 10e triangle équilatéral ?

Expliquez votre raisonnement.

ANALYSE A PRIORI

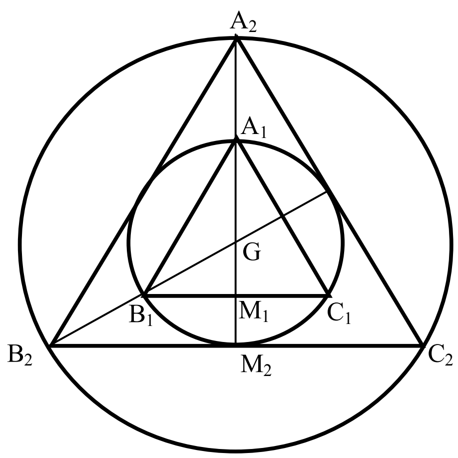
Domaines de connaissances

- Géométrie : propriétés du triangle équilatéral, de sa médiane, position du centre de gravité, cercles inscrit et circonscrit, rapport d'agrandissement d'une figure, théorème de Pythagore
- Arithmétique : progression géométrique
- Algèbre : calcul littéral

Analyse de la tâche

- Observer comment sont formés les triangles équilatéraux et les cercles concentriques, un même cercle étant circonscrit pour un triangle et inscrit pour le suivant.
- Se rendre compte que le premier cercle est circonscrit à un triangle du réseau de côté 1, que le deuxième est circonscrit à un triangle du réseau de côté 2 (isométrique à celui que François a dessiné par une rotation de 60 ou 180 degrés autour du centre) que le troisième cercle est circonscrit à un triangle du réseau de côté 4, etc
- En déduire que d'un triangle au suivant, la longueur des côtés est doublée : ainsi le deuxième triangle a des côtés mesurant 2 cm, le troisième 2 × 2 cm,… Les côtés des triangles successifs s'expriment donc par des puissances de 2 à partir de 2^0 cm pour le petit triangle. Les côtés du dixième triangle mesureraient donc 2^9 cm, soit 512 cm ou 5,12 m.

Ou bien, rechercher une justification en considérant la figure suivante :



Considérer que le point G, centre d'inertie des triangles, est placé aux 2/3 des médianes respectives. Le rayon du petit cercle R_1 est égal à $A_1G = GM_2$ et celui du grand cercle, R_2 est égal à $GA_2 = 2GM_2 = 2R_1$.

- Remarquer que l'on passe de la figure 1 (triangle et cercle) à la figure 2 par une homothétie de rapport 2. En déduire que les mesures des côtés des deux triangles sont dans le même rapport 2.

Ou, calculer la longueur c_1 des côtés du petit triangle en fonction du rayon R_1 en utilisant la propriété de la hauteur d'un triangle équilatéral ou en la déduisant du théorème de Pythagore : $A_1M_1^2 = A_1C_1^2 - MC_1^2 = c_1^2 - (c_1/2)^2 = 3c_1^2/4$, d'où $c_1 = 2A_1M_1/\sqrt{3} = 2(R_1 + R_1/2)/\sqrt{3} = \sqrt{3}\,R_1$. Ainsi si on double le rayon R_1, on double la mesure des côtés du triangle équilatéral.

- En doublant 9 fois la mesure des côtés du premier triangle, on obtient celle du dixième triangle, soit $2^9 = 512$ cm.

Attribution des points

4 Réponse correcte (512 cm) avec justification du calcul et du raisonnement

3 Réponse correcte avec une justification incomplète et un calcul correct

2 Réponse correcte sans justification géométrique mais seulement la lecture du dessin pour remarquer la progression en puissances de 2

ou seulement la longueur des côtés du quatrième et du cinquième triangle à partir d'une construction effective sur le réseau donné

1 Donnée de la longueur des côtés du troisième triangle, seulement lue sur le quadrillage

0 Incompréhension du problème

Niveau : 9, 10

Origine : lg, adaptation du problème 19.F.20