Anniversaires par les nombres

Compte rendu de l'atelier APMEP, Paris 2010

Jean-Christophe Deledicq

KangourouDesMaths@mathkang.org

Pour un dimanche matin à 9 heures, l'affluence était avec nous ! L'atelier proposait d'étudier les suites d'entiers connues et moins connues, pour mettre en lumière toutes les propriétés des entiers de 1 à 100, afin de donner à chaque participant la possibilité de fêter mathématiquement chaque anniversaire jusqu'au centenaire ! Pour ce qui est des nombres 7, 8, 9 et 10 nous renvoyons le lecteur aux 4 livres : “La grande aventure du 7 (resp 8, 9, 10)” aux éditions Circonflexe.

L'atelier s'est déroulé en deux temps, d'abord une approche de quelques suites de nombres, puis l'étude de 4 cas particuliers, le 40, le 60, le 61 et le 62. Ce compte rendu sera donc fidèle à ce qui s'est passé ce 24 octobre 2010, entre 9h et 10h30, salle 208 au Lycée Louis Le Grand. Pour découvrir d'autres suites, et d'autres anniversaires, nous suggérons au lecteur de suivre les prochains ateliers, conférences et publications de l'auteur qui viendront en 2011. Une référence intéressante à retenir est l'œuvre de Neil J. A. Sloane avec le livre “The Encyclopedia of Integer Sequences” ou encore le site http://www.research.att.com/njas/sequences/

1. Une première suite d'entiers

1ère question posée : “Quelle suite d'entiers connaissez-vous ?” Et la première suite proposée par les participants fut celle des nombres **premiers** : 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97, 101 ...

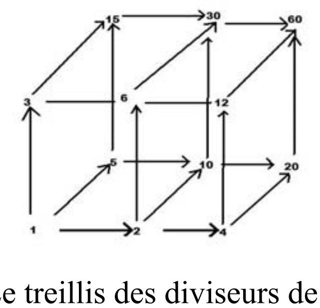
2. Les diviseurs d'un nombre

La deuxième propriété proposée fut celle des nombres parfaits. Comme pour les nombres premiers qui n'ont comme diviseurs que 1 et eux-mêmes, les nombres parfaits nous menèrent à calculer les diviseurs des entiers et à en donner des propriétés permettant de les classer comme suit. Si l'on fait la somme des diviseurs propres d'un entier (tous sauf lui-même) on peut obtenir un résultat inférieur au nombre lui-même, dans ce cas le nombre est dit **déficient** (il y en a 76 de 1 à 100). On peut trouver un résultat supérieur au nombre lui-même, dans ce cas le nombre est dit **abondant** (il y en a 22 de 1 à 100). Ou, enfin, on peut trouver un résultat égal au nombre lui -même, dans ce cas le nombre est dit parfait. Les premiers nombres **parfaits** sont : 6, 28, 496 …

Les premiers nombres abondants sont : 12, 18, 20, 24, 30, 36, 40, 42, 48, 54, 56, 60, 66, 70, 72, 78, 80, 84, 88, 90, 96, 100, 102, 104, 108, 112, 114, 120, 126, 132, 138 …

Beaucoup d'entiers sont aussi la somme des diviseurs d'un autre nombre entier. Cependant il existe quelques rares nombres qui ne sont la somme des diviseurs d'aucun nombre entier, on appelle ces nombres les nombres **intouchables**, dont les premiers spécimens sont : 2, 5, 52, 88, 96, 120 124 ...

On remarquera aussi que 60 est le plus petit entier à avoir 12 diviseurs, que 64 est le plus petit entier à avoir 7 diviseurs exactement. Plus généralement la suite (Un) des **plus petits entiers à n diviseurs exactement** est la suivante : 1, 2, 4, 6, 16, 12, 64, 24, 36, 48, 1024, 60, 4096, 192, 144, 120, 65536, 180 ...

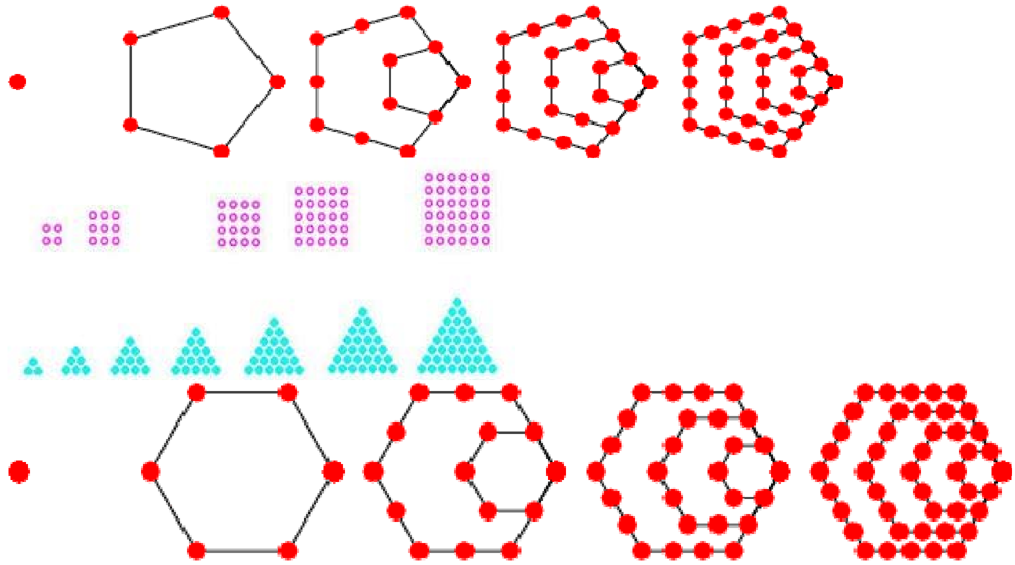


Le treillis des diviseurs de 60

Un nombre **étrange** n, est un nombre naturel qui est abondant mais non semi-parfait : la somme de ses diviseurs propres (y compris 1 mais pas n) est plus grande que n mais aucune somme de certains de ses diviseurs n'est égale à n. Le plus petit nombre étrange est 70. Ses diviseurs propres sont 1,2,5,7,10,14 et 35. Leur somme vaut 74 mais aucune somme de certains de ses diviseurs ne donne 70. Alors que pour 40 (nombre abondant) ses diviseurs propres sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 et l'on a 40 = 20 + 10 + 8 + 2.

<u>3. les nombres polygonaux</u>

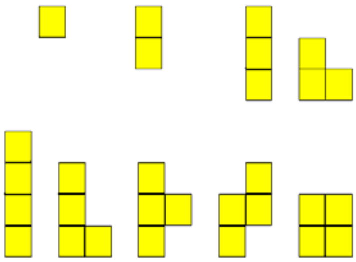
Nous nous sommes ensuite intéressés à deux autres familles de suites d'entiers, les nombres **polygonaux** et les nombres **pyramidaux**. Les plus connus en sont les nombres **carrés** : 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121 …
Plusieurs ouvrages traitent de ces nombres à commencer peut être par "le livre des nombres polygones" de Diophante.
On comprend mieux ces nombres en les visualisant. En voici donc quelques images :

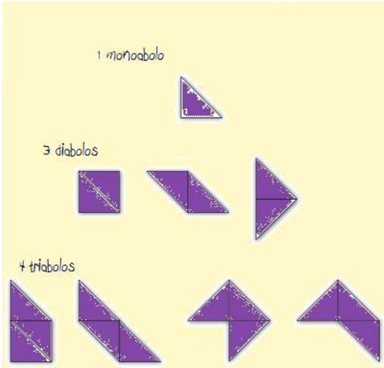


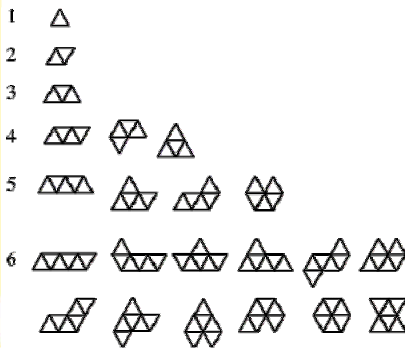
Et voici les listes des premiers d'entre eux :
Nombres **triangulaires** : 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, 105, 120, 136 …
Nombres **pentagonaux** : 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145, 176, 210 …
Nombres **hexagonaux** : 1, 6, 15, 28, 45, 66, 91, 120, 153, 190, 231, 276…
Nombres **heptagonaux** : 1, 7, 18, 34, 55, 81, 112, 148, 189, 235, 286, 342, 403…
Nombres **octogonaux** : 1, 8, 21, 40, 65, 96, 133, 176, 225, 280 …
Nombres **ennéagonaux** : 1, 9, 24, 46, 75, 111, 154, 204, 261, 325, 396, 474, 559 …
Nombres **décagonaux** : 1, 10, 27, 52, 85, 126, 175, 232, 297, 370 …
Nombres **hendecagonaux** : 1, 11, 30, 58, 95, 141 …

<u>4. les **poly-minos**</u>

Nous avons aussi parcouru la suite des nombres de poly-minos ; dont les plus connus sont les 12 pentaminos. Il 'agit des pièces de puzzle que l'on peut réaliser avec 1 carré, puis 2, puis 3 etc... Le même genre de suite de pièces de puzzles se construit avec des triangles rectangles isocèles, on appelle ces pièces des **polyabolos**. On trouve aussi des puzzles construits avec les pièces formées de triangles équilatéraux, on les appelle alors des **polyiamandes**.







Polyminos (n=1 à 4) Polybolos (n=1 à 3) Polyamandes (n=1 à 6)

Nombre de **polyminoes** : 1, 1, 2, 5, 12, 35, 108, 369, 1285, 4655, 17073 ...
Nombre de **polyabolos** : 1, 3, 4, 14, 30, 107, 318, 1106, 3671 ...
Nombre de **poly-amandes** : 1, 1, 1, 3, 4, 12, 24, 66, 160, 448 ...

5. Autres idées pour un anniversaire

Pour l'anecdote, et pour fêter un anniversaire, il est intéressant de noter que l'on peut aussi associer à chaque entier son numéro de département français, son élément dans le tableau périodique de Mendéléiev, ou encore ce qu'il symbolise dans les anniversaires de mariage, (40 ans par exemple sont les noces d'émeraude). Il est aussi aisé, de trouver les traductions de chaque nombre dans chaque langue (exemples : forty, vierzig, cuarenta, quaranta, czterdzieści, quarenta, сорок), de trouver des citations, des titres de livres ou de films qui contiennent le nombre en question (citation : « *Écrire des vers à vingt ans, c'est avoir vingt ans. En écrire à quarante, c'est être poète.* » Fancis Carco ; livre : « *Ali Baba et les Quarante Voleurs* »). L'écriture des nombres dans les différentes numérations, romaine, égyptienne, chinoise etc ... permet aussi d'illustrer une carte d'anniversaire de quelques images.

6. Les unités de temps

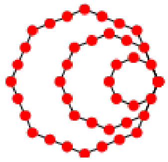
Un calcul facile à mener permettra de calculer à combien de mois, de jours, d'heures, de minutes ou de secondes correspondant à un anniversaire en années. Voici le résultat pour 40 :
Nombre de mois : 480 Nombre de semaines : 2 087
Nombre de jours : 14 610 Nombre d'heures : 350 640
Nombre de minutes : 21 038 400 Nombre de secondes : 1 262 304 000
On pensera surtout à calculer l'inverse, c'est-à-dire durant quelle année, l'anniversaire “tombe juste” en jours, heures, minutes ou secondes. Ainsi, on notera que l'on fête ses 1 milliard de secondes à la fin de ses 31 ans, ses 2 milliards à 63 ans et ses 3 milliards à 95 ans ! On fêtera ses 10 000 jours à 27 ans, ses 20 000 à 54 ans et ses 30 000 à 82 ans et cætera.

7. Les bases

De même, il est facile de programmer le calcul de l'écriture du nombre voulu dans les différentes bases. Ainsi quarante s'écrit en base deux 101000 ; en base trois **1111** ; en base quatre 220 ; en base cinq 130 ; en base six 104 ; en base sept 55 ; en base huit 50 et en base neuf 44.
À ce propos, il est intéressant de noter quelques cas particuliers comme : trente-deux fait 100 000 en base deux et 200 en base quatre. Quatre-vingt cinq fait 1 111 en base quatre. et soixante-dix ne fait que 50 en base quatorze !

8. Exemple d'anniversaire : le nombre 40
Pour n = 0 à 39, soit pour les 40 premiers entiers : $n^2 + n + 41$ est un nombre premier.
Les diviseurs de 40 sont : 1, 2, 4, 5, 8, 10, 20 (et 40). Ce qui en fait un nombre **abondant** : car 1 + 2 + 4 + 5 + 8 + 10 + 20 > 40
40 est un nombre **pratique** : car tous les entiers inférieurs peuvent être obtenus par une somme de ses diviseurs.
C'est un nombre **belge**, car il peut être obtenu en additionant son chiffre des dizaines puis celui des unités et ainsi de suite : 4+0+4+0+4+0+4+0+4+0+4+0+4+0+4+0+4+0+4+0 jusqu'à lui-même.
40 est le plus petit nombre dont la puissance 7ième soit la somme de puissances 7ièmes de nombres différents.
40 est un nombre **hypoténuse**, autrement dit, il existe un triangle rectangle dont les côtés de l'angle droit sont 2 entiers et dont l'hypoténuse vaut 40. Voyez : $40^2 = 1600 = 24^2 + 32^2$

40 est un nombre **octogonal** comme le montre la figure ci-contre.



40 est aussi un nombre **pentaédrique** comme :
1, 6, 18, 40, 75, 126 ...

C'est aussi le nombre de morceaux maximum que l'on peut obtenir par la découpe d'un **baba** (ou tore) en 5 coups de couteaux.
40 est la somme des 4 premières puissances de 3 : $40 = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$
40 ans est âge limite pour avoir la médaille **Fields** !
La quarante-millionième partie du méridien terrestre est le m**ètre**.
40 serait le seul nombre en écriture anglaise à avoir ses lettres dans l'ordre alphabétique.
Le polygone a 40 côtés s'appelle le tétracontagone.
La **température** (en degrés) à laquelle les graduations **Celsius** et **Fahrenheit** sont au même point numérique est à -40. C'est-à-dire -40 °C = -40 °F.

9. Un autre anniversaire : le **60**
Voici l'écriture de 60 dans diverses bases. En base 2 111100 ; en base 3 **2020** ; en base 4 330 ; en base 5 220 ; en base 6 140 ; en base 7 114 ; en base 8 74; en base 9 66.

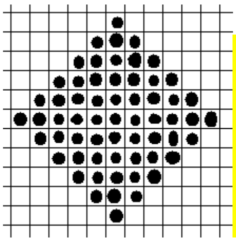
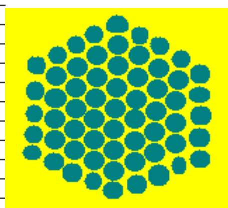
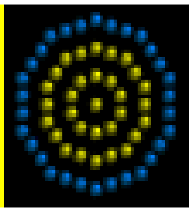
Ses **diviseurs** sont : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60.
60 est le **PPCM** de 1, 2, 3, 4, 5, et 6. 60 est le plus petit nombre divisible par les nombres de 1 à 6. **C'est le plus petit nombre à avoir 12 diviseurs**.
C'est un nombre **abondant**, et comme 40, c'est un nombre **Belge**.
60 est un nombre **unitairement parfait.** Ses diviseurs unitaires sont : 1, 3, 4, 5, 12, 15. et 1 + 3 + 4 + 5 + 12 + 15 + 20 = 60.
60 est la **somme de six impairs consécutifs** : 60 = 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15.
60 est la **somme de cinq pairs consécutifs** : 60 = 8 + 10 + 12 + 14 + 16.
60 est la **somme de quatre premiers consécutifs** : 60 = 11 + 13 + 17 + 19.
60 est la **somme d'une paire de nombres premiers jumeaux** 60 = 29 + 31.
60 est un nombre **pratique** (comme 40).
60 est le nombre de faces du **dodécaèdre étoilé** :
Le ballon de **football**, formé de pentagones et d'hexagones, a **60 sommets**.
60 est un nombre **heptaédrique** (pyramidal à base heptagonale) comme : 1, 8, 26, 60, 115.
60 est l'**aire de quatre triangles héroniens** (triangle dans les côtés sont des nombres entiers)
Le triangle (8, 15, 17) est rectangle et a pour aire 60. Les triangles (10, 13, 13), (13, 13, 24) et (6, 25, 29) ont aussi pour aire 60.

60 est un nombre **hypoténuse.** En effet : $60^2 = 3600 = 2304 + 1296 = 48^2 + 36^2$

Le système de numération babylonien était de **base soixante**. Un tel système de numération est appelé sexagésimal. Il demeure dans les mesures du temps et des angles.
Un angle de 60° est un sextant ; 60° est la valeur des angles du triangle équilatéral, c'est aussi la valeur des angles externes de l'hexagone.
Il y a 60 **minutes** dans un degré et 60 **secondes** dans une minute et 60 minutes dans une **heure**.
Il y a aussi 60 pions dans le jeu de dames chinoises.

10. Anniversaire suite : le 61

Soixante et un est le 18e nombre **premier**. Le précédent est 59, avec lequel il forme un couple de nombres premiers **jumeaux**.
C'est un nombre premier de la forme $2^p - 1$. On appelle ces nombres, les **nombres premiers de Mersenne**. Les premiers premiers de Mersenne sont : 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 521, 607 ...
C'est un nombre premier dont le renversé est un carré comme : 61, 163, 487, 691, 1297 ...
61 est la somme de deux carrés, $5^2 + 6^2$ et aussi la somme de 3 carrés : $3^2 + 4^2 + 6^2$
61 est un nombre **carré centré** : 1, 5, 13, 25, 41, 61, 85,
61 est un nombre **hexagonal centré** 1, 7, 19, 37, 61, 91, 127, 169, 217 ...
61 est un nombre **décagonal centré.** 1, 11, 31, 61, 101, 151 ...

Avec 2 liens et 9 croisements, il y a **61 nœuds** différents possibles.
C'est aussi un nombre dit de **Keith**, parce qu'il apparaît dans la suite de type Fibonacci qui commence par ses propres chiffres en base 10 : 6, 1, 7, 8, 15, 23, 38, 61 …

61 est aussi un nombre hypoténuse : $60^2 + 11^2 = 61^2$ (3600 + 121 = 3721).

61 est la place du survivant de **Flavius Josephius** pour 62 condamnés. Si on place les nombres de 1 à 62 sur un cercle et qu'on en élimine 1 sur 2 jusqu'à qu'il n'en reste plus qu'un, 61 sera le dernier.

11. Dernier anniversaire : le 62

62 c'est 222 en base 5. Ses diviseurs sont : 1, 2, 31, 62, il est donc déficient.
C'est aussi un nombre belge**.**
62 est la somme de 4 carrés : $1^2 + 3^2 + 4^2 + 6^2$
62 est la somme de 3 carrés : $1^2 + 5^2 + 6^2$ ou $2^2 + 3^2 + 7^2$
62 est la somme de 3 cubes : $2^3 + 3^3 + 3^3$
Il exite 2 polyèdres semi-réguliers à 62 faces : le petit rhombicosidodécaèdre qui a 30 carrés, 20 triangles et 12 pentagones et le grand rhombicosidodécaèdre qui a 30 carrés, 20 hexagones et 12 décagones.
62 est le nombre de morceaux maximum pour la découpe d'un baba (ou tore) en 6 coups de couteaux.
Last but not least :

“T is the first, fourth, eleventh sixteenth twentyfourth twentyninth thirtythird thirtyfifth thirtyninth fortyfifth fortyseventh fiftyfirst fiftysixth fiftyeighth sixtysecond ... letter in this sentence”. Cette phrase fait apparaitre la suite d’entiers : 1, 4, 11, 16, 24, 29, 33, 35, 39, 45, 47, 51, 56, 58, 62, 64, 69, 73, 78, 80, 84, 89, 94, 99, 104 …
En français, on s’amusera à trouver la suite d’entiers associée aux phrases «m est la première, dizième … lettre de cette phrase. » ou « i est la première, onzième ... lettre de cette phrase. ».

Conclusion :

Comme le rapporte ce compte rendu, l'atelier n'a montré qu'une petite partie du travail effectué pour sa préparation. Quelques suites ont été étudiées, quelques entiers seulement entre 1 et 100 (l'âge de l'APMEP) ont été décortiqués. Mais, le but était aussi et reste encore de donner envie de faire pareil, de chercher soit même, de découvrir, de dessiner, de s'amuser avec les nombres pour le plaisir et pour leur beauté, comme le disait Paul Erdös « *Pourquoi les nombres sont-ils beaux ? Cela revient à se demander pourquoi la neuvième symphonie de Beethoven est belle. Si vous ne voyez pas pourquoi, personne ne pourra vous l'expliquer. Je sais que les nombres sont beaux.*». Mais rappelons-nous aussi qu'il y a d'autres beautés ailleurs, comme le disait Saint Exupéry « *Les grandes personnes aiment les chiffres. (...) Elles sont comme ça. Il ne faut pas leur en vouloir.* ».