Concours contrôleur des douanes session 2022

BRANCHE DU CONTRÔLE DES OPÉRATIONS COMMERCIALES ET DE L'ADMINISTRATION GÉNÉRALE

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet. Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

La vasopressine est une hormone favorisant la réabsorption de l'eau dans l'organisme.
Le taux de vasopressine dans le sang est considéré comme normal s'il est inférieur à 2 μg/ml.
Cette hormone est sécrétée dès que le volume sanguin diminue. En particulier, il y a production de vasopressine suite à une hémorragie.
On modélise le taux de vasopressine dans le sang, en fonction du temps t exprimé en minutes écoulé depuis le début d'une hémorragie, par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,60]$ par :

$$f(t) = 3t\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} + 2.$$

1. Que vaut $f(0)$?
   Interpréter cette valeur dans le contexte de cet exercice.
2. Calculer $f(60)$ puis en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
   Comment interpréter ce résultat ?
3. Justifier que 12 secondes après le début d'une hémorragie, le taux de vasopressine n'est pas normal.
4. On admet que la fonction f est dérivable sur $[0\,;\,60]$.
   Justifier que $f'(t) = \dfrac{3}{4}(4-t)\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t}$.
5. Démontrer qu'il existe une unique valeur t_0 de $[0\,;\,4]$ telle que $f(t) = 2,5$.

On admettra que $f(t_0) = 2,5 \iff t_0 = 0,174$ et que de la même façon, il existe une solution unique t_1 telle que $t \in [4\,;\,+\infty[$ et $f(t_1) = 2,5 \iff t_1 = 18,93$.

6. Déterminer pendant combien de temps chez une personne victime d'une hémorragie, le taux de vasopressine dans le sang reste supérieur à 2,5 μg/ml.
7. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par

$$F(t) = -12(t+4)\mathrm{e}^{\frac{1}{4}t} + 2t$$

   a. Démontrer que la fonction F est une primitive de la fonction f.
   b. En déduire, en fonction de t_0 et t_1 le taux moyen de vasopressine lors d'un accident hémorragique durant la période où ce taux est supérieur à 2,5 μg/ml.
   Pour cet exercice, vous aurez besoin d'utiliser les valeurs suivantes :

$$\mathrm{e}^{-15} \approx 3,059 \cdot 10^{-7}, \qquad \mathrm{e}^{-0,05} \approx 0,95 \quad \text{et} \quad \mathrm{e}^{-1} \approx 0,367$$

Exercice 2

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablettes, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente.
Parmi les tablettes gagnantes, 60 % permettent de gagner exactement une place et 40 % exactement deux places.
On note $P_B(A)$ la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que l'évènement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat.
   On considère les évènements suivants :
   G : « le client achète une tablette gagnante »
   U : « le client gagne exactement une place de cinéma »
   D : « le client gagne exactement deux places de cinéma »
   a. Donner $p(G)$, $P_G(U)$, $P_G(D)$.
   b. Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à $0,3$.
   c. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.
   Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance mathématique de X.
2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.
   a. Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.
   b. Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.
   c. Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à $0,29$.

Exercice 3

L'espace est rapporté à un repère orthonormal $\left(\mathrm{O}\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$. On considère les points

$$\mathrm{A}(0\,;0\,;2), \qquad \mathrm{B}(0\,;4\,;0) \quad \text{et} \quad \mathrm{C}(2\,;0\,;0)$$

1. **a.** Calculer $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}}$.
   Les points A, B et C déterminent-ils un plan ?
   b. Démontrer que le vecteur $\vec{u}\,(2\,;\,1\,;\,2)$ est normal au plan (ABC).
   c. Justifier alors que $2x + y + 2z = 4$ est une équation de ce plan.
2. **a.** Démontrer que le triangle ABC est isocèle en B.
   b. Démontrer que le point $\mathrm{H}\left(\frac{8}{9}\,;\,\frac{4}{9}\,;\,\frac{8}{9}\right)$ est le projeté orthogonal de O sur le plan (ABC).

Exercice 4

Avant le début des travaux de construction d'une autoroute, une équipe d'archéologie préventive procède à des sondages successifs en des points régulièrement espacés sur le terrain. Lorsque le n-ième sondage donne lieu à découverte de vestiges, il est dit positif.
L'évènement « le n-ième sondage est positif »est noté V_n, on note p_n la probabilité de l'évènement V_n.
L'expérience acquise au cours de ce type d'investigation permet de prévoir que :

— si un sondage est positif, le suivant a une probabilité égale à $0,6$ d'être aussi positif;

— si un sondage est négatif, le suivant a une probabilité égale à $0,9$ d'être aussi négatif.

On suppose que le premier sondage est positif, c'est-à-dire que $p_1 = 1$.

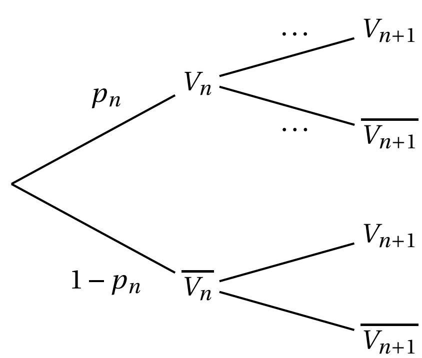
1. Calculer les probabilités des évènements suivants :

  a. A : « les 2e et 3e sondages sont positifs »;

  b. B : « les 2e et 3e sondages sont négatifs »

2. Calculer la probabilité p_3 pour que le 3e sondage soit positif.

3. n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Recopier sur votre copie et compléter l'arbre ci-dessous :



4. Pour tout entier n non nul, établir que $p_{n+1} = 0,5p_n + 0,1$.

5. On note (u_n) la suite définie, pour tout entier n non nul par : $u_n = p_n - 0,2$.

  a. Démontrer que (u_n) est une suite géométrique, en préciser le premier terme et la raison.

  b. Exprimer p_n en fonction de n.

  c. Calculer la limite, quand n tend vers $+\infty$ de la probabilité p_n.