Un petit courrier du lecteur que je suis…

Stéphan Manganelli(*)

Comme le stipule l'intitulé de son préambule, j'ai trouvé intéressante la petite collection d'exercices sur « la récurrence à toute les sauces »(1).
Il m'est venu alors quelques petites remarques que je me permets de vous soumettre, et qui apporteront peut-être quelques compléments d'informations intéressants.

Remarque 1. Il est dit à juste titre pour les suites arithmético-géométriques, qu'il s'avère intéressant de travailler avec les élèves l'obtention de la formule explicite (la démonstration d'une telle formule par récurrence ne devenant de fait qu'un exercice d'école).

On peut aussi faire cette remarque pour les formules des sommes données en exercices 1 et 2. Je vais rappeler ci-dessous deux méthodes permettant de calculer n'importe laquelle de ces sommes (carrés des premiers entiers, cubes des premiers entiers, etc.).

☞ Première méthode dite « des différences finies »

Pour les carrés, on cherche un polynôme $\mathrm{P}(x)$ du troisième degré tel que $\mathrm{P}(x+1)-\mathrm{P}(x)=x^2$.

On obtient par identification $\mathrm{P}(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x$.

On écrit ensuite l'égalité $\mathrm{P}(x+1)-\mathrm{P}(x)=x^2$ pour $x = 1$ jusqu'à $x = n$, et on somme membre à membre. On obtient alors après simplification, $\mathrm{P}(n+1)-\mathrm{P}(1)=\sum_{k=1}^{n}k^2$, soit $\mathrm{P}(n+1)=\sum_{k=1}^{n}k^2$ et enfin $\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

On peut dans l'absolu refaire le même raisonnement pour des degrés supérieurs, sachant bien sûr que les calculs vont se compliquer de plus en plus…

☞ Deuxième méthode un peu astucieuse, et qui nécessite de connaître les sommes de degré moindre

Pour les carrés, on écrit la succession d'égalités suivantes :

(*) Professeur de mathématiques LEGTA « Louis GIRAUD » de CARPENTRAS-SERRES.
(1) Article de Louis-Marie Bonneval, Catherine Combelles et Julien Moreau paru dans le numéro 507, p. 5-13.

$$\begin{aligned}(1+1)^3 &= 1^3+3\times 1^2\times 1+3\times 1\times 1^2+1^3\\ (1+2)^3 &= 1^3+3\times 1^2\times 2+3\times 1\times 2^2+2^3\\ &\vdots\\ (1+(n-1))^3 &= 1^3+3\times 1^2\times (n-1)+3\times 1\times (n-1)^2+(n-1)^3\\ (1+n)^3 &= 1^3+3\times 1^2\times n+3\times 1\times n^2+n^3\end{aligned}$$

Par sommation, il reste :

$$(1+n)^3 = n+3\times[1+2+\ldots+n]+3\sum_{k=1}^{n}k^2+1.$$

soit $\sum_{k=1}^{n}k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

Ici aussi, on peut continuer la méthode pour la somme des cubes… mais les calculs se compliquent de plus en plus aussi.

Remarque 2. Sur les pièges à éviter ou les attentions particulières à avoir lors d'un raisonnement par récurrence…

L'exercice 18 propose de mettre en avant l'importance de l'initialisation dans le raisonnement par récurrence : en l'occurrence la propriété ici est bien héréditaire, mais jamais vraie !

De même, il peut être intéressant d'insister sur le fait de bien écrire la propriété P(n) dont on doit démontrer la véracité pour tout entier n ; et l'exemple tout simple est le suivant :

Démontrer que la suite de Fibonacci est bien définie, c'est-à-dire en fait que, pour tout n, F_n existe.

Eh bien si l'on prend tout naturellement comme propriété P(n) : « F_n existe », on va très vite bloquer pour démontrer l'hérédité… alors que si l'on prend pour propriété P(n) : « Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, F_k existe », le problème ne se pose plus !

Remarque 3. Le théorème d'unicité comme alternative dès la classe de Première…

J'ai pour habitude d'énoncer, dès la classe de Première (S), le théorème suivant qui permet de démontrer une formule explicite conjecturée pour une suite récurrente.

Théorème (d'unicité) : Soit f une fonction et a un réel donné. Lorsque les relations $u_0 = a$ et $u_{n+1} = f(u_n)$ permettent de définir tous les termes d'une suite, cette suite est unique.

On démontrera en Terminale ce théorème par récurrence justement.

Un exemple d'application : Soit la suite définie par $u_0 = 3$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n^2}$, pour tout n. Après calculs des premiers termes, on peut assez facilement conjecturer la formule explicite $u_n = \sqrt{9+n}$, pour tout n. Il suffit ensuite de poser $v_n = \sqrt{9+n}$ et de montrer que u et v ont le même premier terme et vérifient la même relation de récurrence ; le théorème d'unicité permet alors de conclure !