

Sur un problème de lieux géométriques

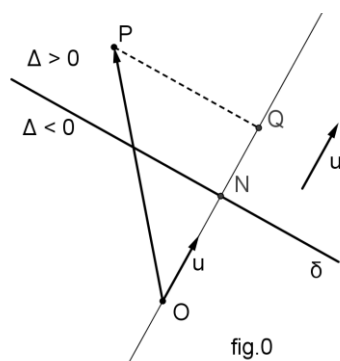
Dans le Bulletin vert n°480 (janvier 2009) de l'APMEP, page 60, Louis Rivoallan a posé le problème suivant :

Étant donné dans un plan un triangle fixe ABC et un point mobile M , on désigne par A', B', C' les centres des cercles circonscrits à MBC, MCA, MAB respectivement. Étudier les variations de l'aire $S(M)$ du triangle $A'B'C'$ et notamment l'allure des courbes de niveau de la fonction $S(M)$.

Dans toute la suite, on raisonne sur les aires orientées, c'est-à dire comptées positivement ou négativement selon que le triangle est ou non de sens direct. On suppose, ce qui n'est pas restrictif, que le triangle initial ABC est de sens direct. On désigne par σ son aire, H son orthocentre, γ son cercle circonscrit.

1. Calcul de l'aire du triangle $A'B'C'$

1.1. Détermination de A', B', C'

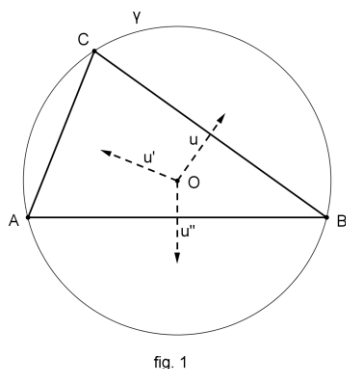


1.1.1. Préliminaire : rappel sur la distance orientée d'un point à une droite

Étant donné une droite δ , on choisit un vecteur unitaire $\vec{u}$ normal à δ ; la distance $\Delta(P)$ d'un point P à δ est la distance usuelle, affectée du signe + ou - selon que P est ou non « du côté de $\vec{u}$ » (Cf. figure 0) par rapport à δ . Un point O étant fixé, appelons N l'intersection de δ et de la droite $(O, \vec{u})$ et Q la projection orthogonale de P sur cette dernière.

Alors $\Delta(P) = \overline{NQ} = \overline{OQ} - \overline{ON} = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OP} + h$, où h est $\Delta(O)$, distance orientée de O à δ .

1.1.2. Détermination des points A', B', C'



Dans toute la suite, O désigne le centre du cercle γ circonscrit à ABC , R le rayon de ce cercle.

Orientons (figure 1) les normales aux trois côtés du triangle vers l'extérieur et appelons $\vec{u}, \vec{u}'$ et $\vec{u}''$ les vecteurs unitaires des normales à BC, CA, AB respectivement.

Désignons par $\Delta(P), \Delta'(P), \Delta''(P)$ les distances orientées de tout point P à BC, CA, AB respectivement.

Posons $\Gamma(P) = OP^2 - R^2$.

On a $\Delta(P) = \vec{u} \cdot \overrightarrow{OP} + h$, avec $h = \Delta(O)$, $\Delta'(P) = \vec{u}' \cdot \overrightarrow{OP} + h'$ et $\Delta''(P) = \vec{u}'' \cdot \overrightarrow{OP} + h''$.

NB : Les constantes h, h', h'' , distances orientées de O aux trois côtés du triangle, sont négatives si le triangle n'a que des angles aigus (O est intérieur au triangle) ; si $\hat{A}$ est obtus, on a $h > 0, h' < 0, h'' < 0$.

Toute équation du type $\Gamma(P) - 2\lambda \Delta(P) = 0$ représente un cercle passant par B et C : d'une part les termes de plus haut degré du premier membre sont ceux de Γ , c'est-à-dire $x^2 + y^2$, et d'autre part Γ et Δ sont nuls en B et C . Son centre est le point $O + \lambda \vec{u}$. En écrivant que le point M est sur ce cercle, il vient $\lambda = \frac{\Gamma(M)}{2\Delta(M)}$, puis $\overrightarrow{OA'} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(M)}{\Delta(M)} \vec{u}$.

De même $\overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(M)}{\Delta'(M)} \vec{u}'$ et $\overrightarrow{OC'} = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(M)}{\Delta''(M)} \vec{u}''$.

1.2. Calcul de l'aire $S(M)$ du triangle $A'B'C'$

L'aire orientée du triangle $A'B'C'$ est $\frac{1}{2} \det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$. On peut écrire, avec des notations abrégées :

$$S(M) = \frac{1}{2} \det(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}) = \frac{1}{8} \Gamma^2 \det\left(\frac{\vec{u}'}{\Delta'} - \frac{\vec{u}}{\Delta}, \frac{\vec{u}''}{\Delta''} - \frac{\vec{u}}{\Delta}\right) = \frac{1}{8} \frac{\Gamma^2}{\Delta \Delta' \Delta''} \varphi(M)$$

avec $\varphi(M) = \Delta \det(\vec{u}', \vec{u}'') + \Delta' \det(\vec{u}'', \vec{u}) + \Delta'' \det(\vec{u}, \vec{u}')$

Le second membre est une fonction affine de M , qui, si elle n'est pas constante, s'annule sur toute une droite. Mais on voit aisément que l'aire $A'B'C'$ n'est nulle que si M est sur le cercle circonscrit γ au triangle ABC . Il en résulte que $\varphi(M)$ est une constante. L'explication est celle-ci :

$$\varphi(M) = (\vec{u} \cdot \overrightarrow{OM} + h) \det(\vec{u}', \vec{u}'') + (\vec{u}' \cdot \overrightarrow{OM} + h') \det(\vec{u}'', \vec{u}) + (\vec{u}'' \cdot \overrightarrow{OM} + h'') \det(\vec{u}, \vec{u}')$$

Le second membre est de la forme $\vec{w} \cdot \overrightarrow{OM} + C^{te}$, avec

$$\vec{w} = \det(\vec{u}', \vec{u}'') \vec{u} + \det(\vec{u}'', \vec{u}) \vec{u}' + \det(\vec{u}, \vec{u}') \vec{u}''$$

Ce vecteur est nul : on voit immédiatement que $\det(\vec{w}, \vec{u})$, par exemple, est nul, donc que $\vec{w}$ est colinéaire à $\vec{u}, \vec{u}'$ et $\vec{u}''$.

N.B. : la relation $\det(\vec{u}', \vec{u}'') \vec{u} + \det(\vec{u}'', \vec{u}) \vec{u}' + \det(\vec{u}, \vec{u}') \vec{u}'' = 0$ entre trois vecteurs d'un plan, unitaires ou non, est plus ou moins classique.

$$\text{Finalement : } S(M) = K \frac{\Gamma^2(M)}{\Delta(M) \Delta'(M) \Delta''(M)}$$

avec $K = \frac{1}{8} (h \det(\vec{u}', \vec{u}'') + h' \det(\vec{u}'', \vec{u}) + h'' \det(\vec{u}, \vec{u}'))$.

Calcul de la constante K

Il est immédiat que

$$\det(\vec{u}', \vec{u}'') = \sin \hat{A}, \quad \det(\vec{u}'', \vec{u}) = \sin \hat{B}, \quad \det(\vec{u}, \vec{u}') = \sin \hat{C},$$

d'où, en désignant par a, b, c les longueurs des côtés BC, CA, AB et en exploitant la formule $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$, $K = \frac{1}{16R} (ah + bh' + ch'')$.

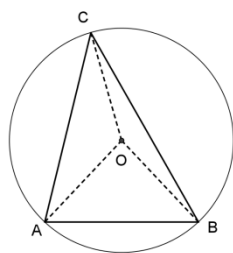
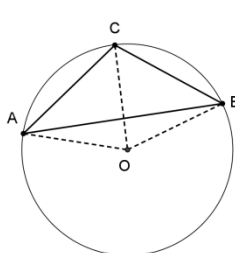


fig. 1 bis



Deux cas sont alors à distinguer (figure 1 bis) :

- Le triangle ABC a tous ses angles aigus.

Alors O est à son intérieur, h, h' et h'' sont négatifs, $-\frac{1}{2} (ah + bh' + ch'')$ est la somme des aires des triangles BOC, COA et AOB , donc l'aire σ du triangle ABC .

- L'angle $\hat{C}$, par exemple est obtus.

On a $h < 0$, $h' < 0$, $h'' > 0$ et $-\frac{1}{2} (ah + bh' + ch'') = \text{aire } BOC + \text{aire } COA - \text{aire } AOB$, ce qui, étant donné la position de O est à l'extérieur du triangle, redonne l'aire de ABC .

Le cas d'un angle droit se règle de la même façon.

On arrive donc, quel que soit le triangle ABC , à :

$$S(M) = - \frac{\sigma}{8R} \frac{(OM^2 - R^2)^2}{\Delta(M) \Delta'(M) \Delta''(M)}$$

Nous supposons désormais que le triangle a tous ses angles aigus

2. Étude de la fonction $Q(M) = \frac{S(M)}{\sigma}$

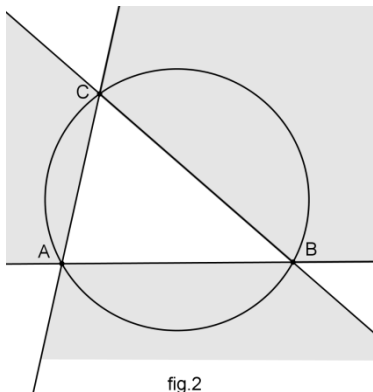


fig.2

2.1. Propriétés élémentaires de la fonction Q

2.1.1. Signe de Q

La formule $Q(M) = - \frac{1}{8R} \frac{(OM^2 - R^2)^2}{\Delta(M) \Delta'(M) \Delta''(M)}$ donne immédiatement le signe de $Q(M)$ en fonction de la position de M . Nous appellerons E_+ la région où la fonction est > 0 , E_- la région où elle est ≤ 0 (en grisé sur la figure 2).

Les seuls points où $Q(M) = 0$ sont les points du cercle γ autres que A, B, C .

2.1.2. Comportement de Q aux bords des zones où elle est définie

Lorsque le point M tend vers un point M_0 situé sur l'une des droites BC, CA, AB , mais autre que A, B, C , $Q(M)$ tend vers l'infini. Il en est de même si M s'éloigne indéfiniment, car

$$|Q(M)| \geq \frac{1}{8R} \frac{(OM^2 - R^2)^2}{(OM + |h|)(OM + |h'|)(OM + |h''|)}$$

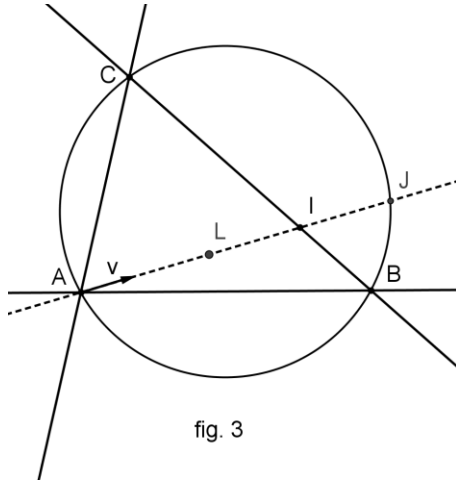
et le second membre est équivalent, quand $OM \rightarrow +\infty$, à $\frac{OM}{8R}$.

Les courbes de niveau de Q sont donc bornées.

N.B. : Le comportement de Q au voisinage des points A, B, C est plus complexe.

2.1.3. Variation de $Q(M)$ sur une droite d issue de A et coupant $]BC[$

Appelons I le point d'intersection de d et de $]BC[$, J le second point d'intersection de d et γ , $\vec{v}$ le vecteur unitaire de d orienté de A vers I .



Posons $\overline{AI} = p$ ($p > 0$) , $\overline{AJ} = q$ ($q > p$) , $\overrightarrow{AM} = r \vec{v}$ et faisons varier r .

$\Delta'(M)$ et $\Delta''(M)$ sont l'un et l'autre le produit de r par une constante, $\Delta(M)$ est le produit par une constante de $\overline{IM} = r - p$. De plus $\Gamma(M)$, puissance de M par rapport au cercle γ , s'écrit aussi $\Gamma(M) = \overline{MA} \times \overline{MJ} = r(r - q)$.

On a donc $Q(M) = k \frac{r^2(r-q)^2}{r^2(p-r)} = k \frac{(r-q)^2}{p-r}$, où k est une constante dépendant de d . Cette constante k est positive, car lorsque M est intérieur au triangle, c'est-à-dire $0 < r < p$, on a $Q(M) > 0$. Notons que cette

fonction est prolongeable par continuité pour $r = 0$.

$$\frac{dQ}{dr} = k \frac{(r-q)(2(p-r)+(r-q))}{(p-r)^2} = k \frac{(r-q)(2p-r-q)}{(p-r)^2}$$

$\frac{dQ}{dr}$ s'annule donc pour $r = q$ et pour $r = 2p - q$, c'est-à-dire lorsque M est en J ou au point L symétrique de J par rapport à I .

De plus, on a toujours $2p - q < q$ et le numérateur de $\frac{dQ}{dr}$ est positif si et seulement si $2p - q < r < q$. Nous avons ainsi le tableau de variations :

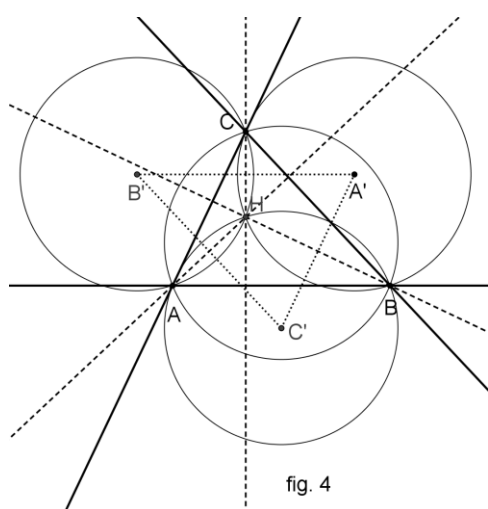
r	$-\infty$	$2p-q$		p	q	$+\infty$
dQ/dr	$-$	0	$+$	∞	$+$ 0 $-$	
Q	$+\infty \searrow$	$\mu_D \nearrow$	$+\infty \infty -\infty \nearrow$	$0 \searrow$	$-\infty$	

N.B. : Nous n'avons *a priori* aucune information sur la position de L par rapport à A .

2.1.4. Cas de la hauteur issue de A

La restriction de Q à la hauteur issue de A présente un minimum strict lorsque M passe au point L symétrique de J par rapport à I . Mais ce point n'est autre que l'orthocentre H , résultat que nous allons exploiter.

2.1.5. Calcul de $Q(H)$



Puisque le symétrique de H par rapport à chaque côté du triangle ABC est sur le cercle circonscrit γ , les trois cercles circonscrits à HAB, HBC, HCA sont les symétriques de γ par rapport aux trois côtés du triangle ABC . Leurs centres sont les symétriques de O par rapport à ces côtés. Le triangle $A'B'C'$ est donc homothétique dans le rapport $\frac{1}{2}$ de celui formé par les milieux des côtés BC, CA, AB , ce qui prouve que $S(H) = \sigma$, donc que $Q(H) = 1$.

L_1 passe par l'orthocentre H

2.1.6. Le gradient de Q s'annule en H

Nous venons de voir (2.1.4.) que la restriction de Q à chacune des hauteurs du triangle ABC présente en H un minimum strict. Considérons la différentielle en H de la fonction $z = Q(M) = q(x, y)$, soit $dQ = \overrightarrow{\text{grad}} Q(H) \cdot \overrightarrow{dM} = q'_x(H)dx + q'_y(H)dy$.

Cette différentielle est nulle dans les directions des trois hauteurs, donc $\overrightarrow{\text{grad}} Q(H)$, orthogonal à trois vecteurs non colinéaires (deux suffiraient), est nul ; si l'on préfère, $q'_x(H) = q'_y(H) = 0$.

2.2. Propriétés élémentaires des courbes de niveau de Q

2.2.1. Les courbes de niveau de Q sont des quartiques

Les courbes de niveau de Q ont pour équation $Q(M) = \mu$, autrement dit

$$f_\mu(M) = (OM^2 - R^2)^2 + 8R\mu \Delta(M) \Delta'(M) \Delta''(M) = 0$$

La courbe L_μ représentée par l'équation ci-dessus n'est pas exactement la courbe de niveau μ : elle est obtenue en lui adjoignant les points A, B, C .

Pour $\mu = 0$, c'est le cercle Γ compté deux fois. On suppose désormais $\mu \neq 0$.

Dans un repère orthonormal $f_\mu(M)$ s'écrit sous la forme d'un polynôme $F_\mu(x, y)$ du quatrième degré par rapport aux coordonnées (x, y) de M . L_μ est donc une « quartique », c'est-à-dire une courbe algébrique de degré 4.

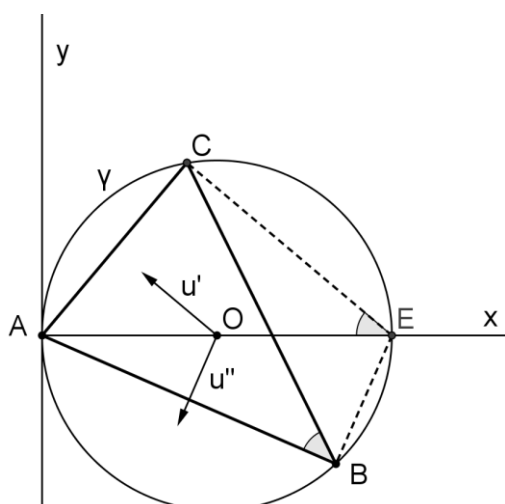


fig. 5

2.2.2. Équation de L_μ avec origine en A

Prenons comme origine A , l'axe des x étant dirigé de A vers O . L'équation de Γ est donc $x^2 + y^2 -$

$2Rx = 0$. Appelons E le point diamétralement opposé à A .

Les points A, B, E, C sont dans cet ordre sur Γ . De $\widehat{AEC} = \hat{B}$ (relation entre angles inscrits), on tire $\widehat{xEC} = \pi - \hat{B}$; donc le vecteur $\vec{u}'$, parallèle à $\vec{EC}$ et de même sens, a pour coordonnées $(-\cos\hat{B}, \sin\hat{B})$. D'où $\Delta'(M) = -x \cos\hat{B} + y \sin\hat{B}$.

De même $\widehat{AEB} = \hat{C}$, donc $\widehat{xEB} = \pi - \hat{C}$. Le vecteur $\vec{u}''$, parallèle à $\vec{EB}$ et de même sens, a pour coordonnées $(-\cos\hat{C}, -\sin\hat{C})$. On en tire $\Delta''(M) = -x \cos\hat{C} - y \sin\hat{C}$.

On aboutit ainsi à $\Delta'(M)\Delta''(M) = (x \cos\hat{B} - y \sin\hat{B})(x \cos\hat{C} + y \sin\hat{C})$.

Nous laissons au lecteur le soin de vérifier que la formule reste valable si l'un des deux angles $\hat{B}$ et $\hat{C}$ est obtus.

En outre $\Delta(M) = x \cos \omega + y \sin \omega - l$, où l est la longueur de la hauteur issue de A et ω l'angle polaire de $\vec{u}$. L'équation de L_μ s'écrit donc sous la forme (E) :

$$(x^2 + y^2 - 2Rx)^2 + 8R\mu (x \cos \omega + y \sin \omega - l)(x \cos\hat{B} - y \sin\hat{B})(x \cos\hat{C} + y \sin\hat{C}) = 0$$

N.B. : En fait, on a $\omega = \hat{C} - \hat{B}$, mais nous n'aurons pas besoin de cette expression.

2.2.3. A, B, C sont des points singuliers de L_μ

Parenthèse sur la notion de point singulier

Soit C une courbe d'équation $f(x, y) = 0$, où f est différentiable autant que de besoin. Un point $M_0(x_0, y_0)$ de C est dit point singulier si en M_0 f'_x et f'_y s'annulent, autrement dit si le gradient de f est nul en M_0 . Par tout point non singulier passe un arc « ordinaire » de C pourvu en ce point d'une tangente.

Soit M_0 un point singulier. Posons $D(M_0) = (f''_{xy}(M_0))^2 - f''_{x^2}(M_0)f''_{y^2}(M_0)$.

Si $D(M_0) > 0$, alors par ce point passent deux arcs longeant des tangentes distinctes.

Si $D(M_0) < 0$, alors ce point est un point isolé de C (la fonction f présentant en M_0 un extremum strict).

N.B.1 : Ces résultats découlent en grande partie du fait qu'au voisinage de M_0 la fonction f admet le développement limité

$$f(x_0 + X, y_0 + Y) = f''_{x^2}(M_0)X^2 + 2f''_{xy}(M_0)XY + f''_{y^2}(M_0)Y^2 + o(X^2 + Y^2).$$

N.B.2 : Si $D(M_0) = 0$, on est dans le « cas douteux », où il faut faire intervenir les dérivées d'ordre supérieur.

Cas d'une courbe algébrique à l'origine

L'origine est point singulier si et seulement si $f(0,0) = f'_x(0,0) = f'_y(0,0) = 0$, c'est-à-dire si et seulement si le terme constant et les termes de degré 1 du polynôme f sont nuls. Si les termes de degré 2 de f sont $\propto x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2$, alors le D ci-dessus est $\beta^2 - \alpha\gamma$, discriminant de cette forme quadratique.

On connaît donc l'allure de la courbe à l'origine, sauf dans le cas $\beta^2 - \alpha\gamma = 0$.

Si on se reporte à l'équation (E) ci-dessus, on voit aussitôt que le premier membre n'a pas de termes de degrés 0 et 1, mais qu'il a toujours des termes de degré 2, car le coefficient de y^2 est non nul. A est donc point singulier d'ordre 2 de L_μ , un « point double ». Il en est évidemment de même pour B et C .

Les courbes L_μ ont donc au moins trois points singuliers : A, B, C .

2.2.4. H est pour L_1 un quatrième point singulier

De $f_1(M) = (OM^2 - R^2)^2 + 8R \Delta(M) \Delta'(M) \Delta''(M)$ on tire aussitôt

$$f_1(M) = (Q(M) - 1)g(M), \text{ avec } g(M) = -8R \Delta(M) \Delta'(M) \Delta''(M).$$

On a donc $df_1 = (Q - 1)dg + g dQ$, soit $\overrightarrow{\text{grad}} f_1 = (Q - 1) \overrightarrow{\text{grad}} g + g \overrightarrow{\text{grad}} Q$.

Mais on a vu qu'en H $\overrightarrow{\text{grad}} Q$ et $(Q - 1)$ sont nuls.

2.2.5. Si L_μ a un quatrième point singulier D , ses seuls points réels sont A, B, C, D

Nous nous servons du théorème que voici :

Un théorème¹ de géométrie algébrique

(T) Si une quartique d'équation $F(x,y) = 0$ a quatre points singuliers au moins, elle est décomposée, c'est-à-dire que le polynôme F est le produit de deux polynômes non constants.

Ce résultat n'est valable que dans le plan réel complexifié, c'est-à-dire que F est soit le produit de deux polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$, soit le produit d'un polynôme à coefficients complexes par son conjugué.

Supposons que L_μ ait les quatre points singuliers A, B, C, D . D'après le théorème (T), L_μ est décomposée : $F_\mu(x, y)$ est le produit de deux polynômes réels ou imaginaires conjugués.

Dans le premier cas $F_\mu(x, y) = G(x, y) H(x, y)$, où G et H sont deux polynômes à coefficients réels. Les termes de plus haut degré de F_μ sont $(x^2 + y^2)^2$. Comme ils sont le produit des termes de plus haut degré de G et H , les courbes d'équation $G(x, y) = 0$ et $H(x, y) = 0$ sont des cercles. Mais ces derniers passent par A, B, C . On trouve donc le cercle Γ compté deux fois, ce qui correspond au cas $\mu = 0$ que nous avons exclu.

Dans le second cas F_μ est de la forme $(U + iV)(U - iV) = U^2 + V^2$, où U et V sont deux polynômes à coefficients réels, le plus grand des deux degrés étant égal à 2. Les points réels de L_μ sont donc donnés par $U(x, y) = V(x, y) = 0$. Il s'agit donc de l'intersection de deux coniques ou d'une conique C et d'une droite Δ , ce qui donne quatre points au plus, sauf si la conique est décomposée en deux droites dont une est Δ , mais alors L_μ contiendrait Δ et ne serait donc pas bornée ; or nous avons montré qu'elle l'est (§ 2.1.2.).

N.B. : Donc si L_μ a plus de quatre points, ses seuls points singuliers sont A, B, C .

2.2.6. Si L_μ a plus de 4 points, l'ensemble de ses points non isolés est une courbe fermée (au sens de : tracé continu allant d'un point à lui-même)

Nous nous appuyerons sur le théorème suivant :

Un autre théorème² de géométrie algébrique

(T') Si une quartique a exactement trois points doubles et s'ils ne sont pas alignés, elle est unicursale, c'est-à-dire qu'elle a un paramétrage rationnel.

D'après 2.2.5. L_μ a comme seuls points singuliers les points doubles A, B et C . Il résulte du théorème (T) qu'elle est unicursale.

Nous savons en outre qu'elle est bornée (2.1.2.). Or les points non isolés d'une courbe unicursale réelle bornée forment une courbe fermée. En effet, elle admet un paramétrage du

¹ On trouvera en annexe une justification sommaire.

² On trouvera en annexe quelques indications sur ce théorème.

type $x = X(t)$, $y = Y(t)$ où X et Y sont des fractions rationnelles bornées. Quand t décrit $\mathbb{R}$, le point (x, y) varie continûment et revient à son point de départ, car les limites d'une fraction rationnelle bornée en $-\infty$ et $+\infty$ sont les mêmes.

N.B. 1 : L'exemple de la courbe $x^3 = x^2 + y^2$, paramétrée par $x = 1 + t^2$, $y = t + t^3$, illustre bien le problème des points isolés. L'origine, point double isolé, est bien obtenue par le paramétrage, mais pour $t = \pm i$.

N.B. 2 : Une quartique à trois points doubles peut n'avoir aucun autre point réel ; elle reste unicursale, mais dans le domaine complexe. Nous verrons plus loin que les courbes L_μ sont dans ce cas pour $0 < \mu < 1$.

2.2.7. Conclusion provisoire sur l'allure de L_μ pour $\mu \neq 0$

Nous avons déjà une bonne idée de l'allure de L_μ :

- Ou bien L_μ n'a que trois ou quatre points réels (dont A, B et C). Alors la fonction Q prend au plus une fois la valeur μ .
- Ou bien L_μ contient au moins deux points autres que A, B et C . C'est une quartique unicursale, dont les seuls points singuliers sont A, B et C . Elle est formée d'**une courbe fermée** à laquelle il faut adjoindre ceux des trois points A, B et C qui sont isolés. De plus cette courbe ne peut traverser les droites portant les côtés du triangle qu'en A, B et C .

Les points majeurs à discuter sont donc

- A, B et C sont-ils ou non points isolés ?
- L_μ est-elle une « vraie courbe » ou est-elle réduite à 3 ou 4 points ?

2.3. A, B, C sont-ils ou non points isolés de L_μ ?

Il suffit évidemment de faire l'étude en A .

2.3.1. Termes du second degré dans l'équation de L_μ

Reprenons le repère utilisé au 2.2.2. : origine A , axe des x dirigé de A vers O . L'ensemble des termes du second degré dans l'équation de L_μ est

$$4R^2x^2 - 8R\mu l(x \cos \hat{B} - y \sin \hat{B})(x \cos \hat{C} + y \sin \hat{C}), \text{ soit encore } R \Phi(x, y), \text{ où}$$

$$\Phi(x, y) = x^2(R - 2\mu l \cos \hat{B} \cos \hat{C}) + 2\mu lxy(\sin \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{C} \cos \hat{B}) + 2\mu ly^2 \sin \hat{B} \sin \hat{C}.$$

$$\Phi(x, y) \text{ est du type } \alpha x^2 + 2\beta xy + \gamma y^2, \text{ forme quadratique de discriminant } D = \beta^2 - \alpha\gamma.$$

Nous avons vu plus haut (encadré de 2.2.3.) que l'allure de la courbe en A est liée au signe du discriminant D .

2.3.2. Calcul du discriminant

$$D = \mu^2 l^2 (\sin \hat{B} \cos \hat{C} - \sin \hat{C} \cos \hat{B})^2 + 4\mu^2 l^2 \sin \hat{B} \cos \hat{C} \sin \hat{C} \cos \hat{B} - 2\mu l R \sin \hat{B} \sin \hat{C},$$

$$D = \mu^2 l^2 (\sin \hat{B} \cos \hat{C} + \sin \hat{C} \cos \hat{B})^2 - 2\mu l R \sin \hat{B} \sin \hat{C},$$

$$D = \mu^2 l^2 \sin^2 \hat{A} - 2\mu l R \sin \hat{B} \sin \hat{C} = \mu l (\mu l \sin^2 \hat{A} - 2R \sin \hat{B} \sin \hat{C}).$$

Des relations $\frac{a}{\sin \hat{A}} = \frac{b}{\sin \hat{B}} = \frac{c}{\sin \hat{C}} = 2R$, on tire $2R \sin \hat{B} \sin \hat{C} = \frac{bc}{2R} = \frac{bc \sin \hat{A}}{a}$. En exprimant de deux manières l'aire du triangle ABC , il vient $al = bc \sin \hat{A}$, d'où $2R \sin \hat{B} \sin \hat{C} = l$ et finalement $\boxed{D = \mu l^2 (\mu \sin^2 \hat{A} - 1)}$.

2.3.4. Premier cas : $\mu < 0$ ou $\mu > \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$

Alors $D > 0$, donc il passe par A deux arcs longés par des tangentes distinctes.

2.3.5. Second cas : $0 < \mu < \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$

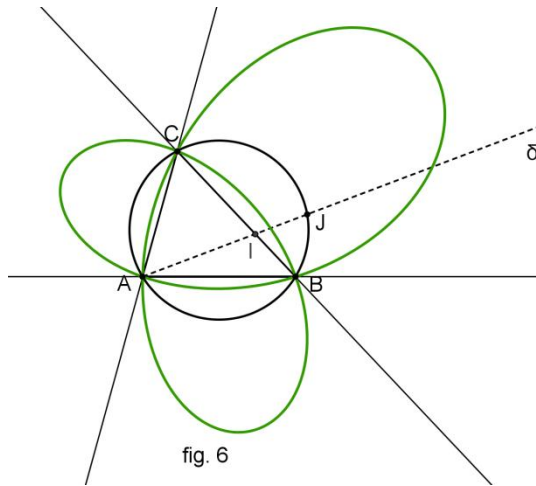
Alors $D < 0$, et nous savons (encadré de 2.2.3.) que A est point isolé.

2.3.6. Troisième cas : $\mu = \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$

Nous sommes dans le « cas douteux » $D = 0$. Nous réglerons la chose plus tard.

2.4. Tracé de L_μ pour $\mu < 0$

La courbe présente en chacun des points A, B et C deux tangentes distinctes.



Traçons une demi-droite δ issue de A et passant par un point I de $]BC[$; elle recoupe Γ en un point J . Quand un point M de δ part de I dans la direction opposée à A , nous avons vu en 2.1.3. que $Q(M)$ croît de $-\infty$ à zéro, valeur atteinte en J , puis décroît et tend vers $-\infty$ quand M s'éloigne indéfiniment.

Cette fonction continue passe donc deux fois par la valeur μ : une fois entre I et J , une fois au-delà de J . Cela nous donne donc un arc de courbe situé dans la lunule $BJCIB$ et un autre situé hors de γ . L'allure est toujours celle donnée sur la figure 6 ;

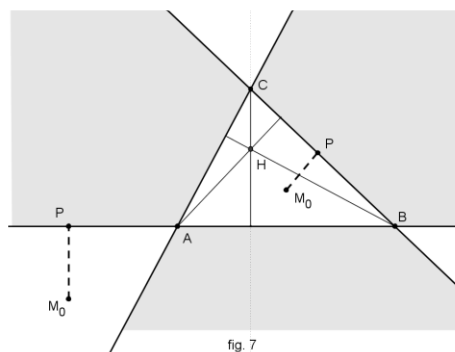
seule la taille des boucles varie.

Nous supposons désormais $\mu > 0$.

2.5. L_μ est-elle une « vraie courbe » ou est-elle réduite à 3 ou 4 points ?

$Q(M)$ prend la valeur 1 au seul point H et ne prend aucune valeur de $]0, 1[$

La quartique L_1 a 4 points singuliers : A, B, C, H . Nous avons vu plus haut (2.2.5.) que cela entraîne que L_1 n'a pas d'autre point réel et que donc la fonction $Q(M)$ prend la valeur 1 au seul point H .



Soit E_+ l'ensemble des points où la fonction $Q(M)$ est strictement positive (zone en blanc sur la figure 7).

Supposons qu'il existe dans E_+ un point M_0 tel que $0 < Q(M_0) < 1$. On peut toujours trouver un point P situé sur l'une des trois droites BC, CA, AB , tel que $[M_0P[$ soit tout entier dans E_+ et ne contienne pas H . Lorsque M décrit $[M_0P[$, $Q(M)$ varie continûment, part d'une valeur inférieure à 1 et tend vers $+\infty$. $Q(M)$ passe donc

par la valeur 1, ce qui est impossible. D'où :

- Si $0 < \mu < 1$, les seuls points réels de L_μ sont A, B, C .
- Si $\mu = 1$, les seuls points réels de L_μ sont A, B, C, H .

Il ne nous reste plus qu'à faire l'étude des courbes L_μ pour $\mu > 1$.

2.6. Discussion du tracé de L_μ pour $\mu > 1$

2.6.1. L_μ contient une infinité de points intérieurs au triangle ABC

Il suffit d'adapter à H le raisonnement fait pour M_0 en 2.5. On prend un point P sur le pourtour du triangle, autre que les sommets. Quand M décrit $[M_0P[$, $Q(M)$ part de la valeur 1 et tend vers $+\infty$. Par continuité, $Q(M)$ passe par toute valeur supérieure à 1.

2.6.2. Si $\mu < \frac{1}{\sin^2 A}$, L_μ n'a aucun point dans l'angle opposé à $\widehat{BAC}$

D'après 2.3.2., le point A est isolé sur L_μ . Appelons E_A l'angle opposé par le sommet à $\widehat{BAC}$, privé des deux demi-droites qui le bordent. Soit Λ_μ l'ensemble des points non isolés de L_μ . Λ_μ est une courbe fermée « d'un seul tenant » contenant des points intérieurs au triangle. Un point mobile sur Λ_μ , partant de l'intérieur du triangle, ne peut aller dans E_A qu'en passant par A , qui du coup ne serait pas isolé.

En termes plus nobles, E_A et l'intérieur de son complémentaire sont deux ouverts disjoints contenant le connexe Λ_μ , donc il est inclus dans l'un d'eux. Comme Λ_μ a des points hors de E_A , cette courbe est tout entière hors de E_A .

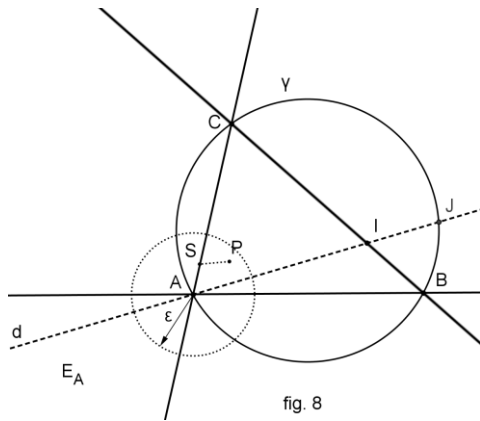
2.6.3. La courbe L_{μ_0} , où $\mu_0 = \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$, n'a aucun point dans l'angle opposé à $\widehat{BAC}$

Nous venons de prouver en 2.6.2. qu'il n'existe dans E_A aucun point où la fonction Q prenne une valeur inférieure à $\frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$. Supposons qu'il existe dans E_A un point M_0 où $(M_0) = \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$. Il y a alors en ce point un minimum local. Il suffit de reprendre le raisonnement fait pour H : puisqu'il y a un minimum local, $\overrightarrow{\text{grad}} Q(M_0) = \mathbf{0}$, donc il y a un point singulier en M_0 pour la courbe d'équation $Q(M) = Q(M_0)$. La courbe L_{μ_0} aurait un quatrième point singulier et serait donc réduite à quatre points, alors qu'elle a une infinité de points à l'intérieur du triangle.

2.6.4. Allure de L_{μ_0} au voisinage de A pour $\mu_0 = \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$

Montrons d'abord que le point A n'est pas isolé sur L_{μ_0} .

Supposons qu'il le soit. Il existe ε tel que le disque ouvert Ω de centre A et de rayon ε ne contienne aucun point de L_{μ_0} autre que A . Supposons alors que dans la portion de ce disque



intérieure au triangle existe un point P tel que $Q(P) < \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$; soit S un point de $[AC]$ situé dans Ω . Quand M décrit $[PS[$, $Q(M)$ part de la valeur $Q(P)$ pour finalement tendre vers $+\infty$, donc passe par la valeur $\frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Ainsi, dans la portion du disque Ω intérieure au triangle, on a en tout point $Q(M) > \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$. Mais nous savons qu'il en est de même dans E_A .

Utilisons maintenant le travail fait en 2.1.3. Si nous considérons la restriction de Q à n'importe quelle

droite d issue de A et coupant $]BC[$, cette restriction, prolongée par continuité en A , présente en A un minimum local strict. Si I et J désignent respectivement les points d'intersection de d avec $]BC[$ et γ , il résulte de 2.1.3. que l'existence de ce minimum en A entraîne que I est le milieu de AJ . Le point J est donc à l'intersection de γ et de la droite image de BC dans l'homothétie de centre A et de rapport 2, ce qui n'est possible que pour deux droites d au plus. On arrive donc à une contradiction.

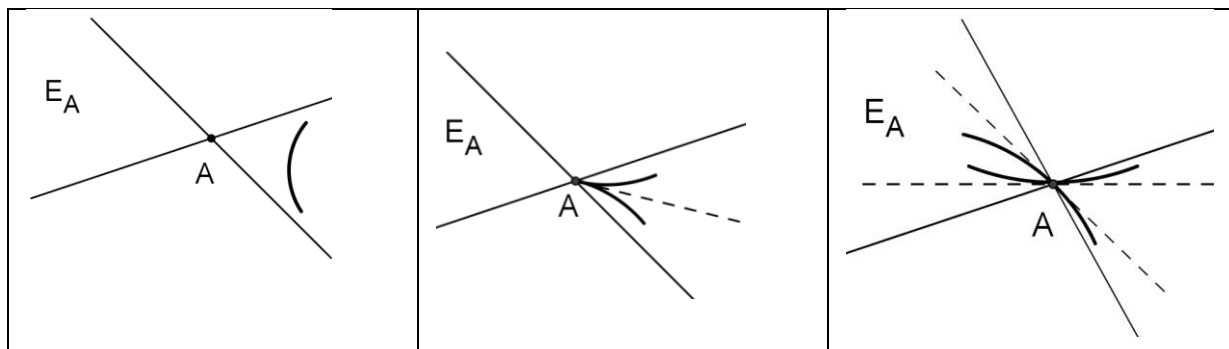
L_{μ_0} présente en A un rebroussement

A n'étant pas isolé sur L_{μ_0} , il passe par A un arc de cette courbe ; mais nous avons vu que, localement, la courbe est tout entière dans l'angle $\widehat{BAC}$: il y a rebroussement en A .

2.6.5. Tracé de L_{μ} au voisinage de A

Nous obtenons finalement selon la valeur de μ les schémas suivants :

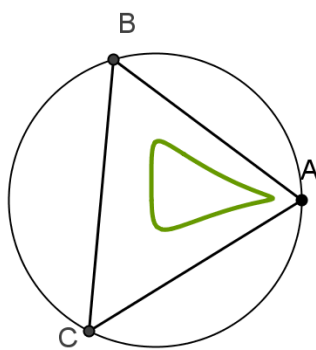
$1 < \mu < \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$	$\mu = \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$	$\mu > \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$
--------------------------------------	----------------------------------	----------------------------------



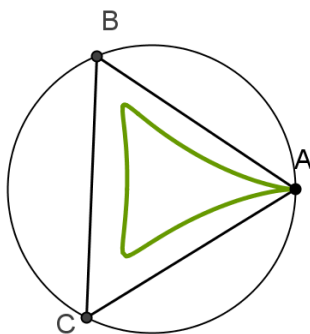
2.6.6. Tracé global de L_μ pour $\mu > 1$.

Récapitulons. L_μ est une courbe fermée entourant H ayant en chacun des points A, B, C une des configurations suivantes : croisement d'arcs, rebroussement ou point isolé. On a évidemment autant de types de courbes que de positions de μ par rapport aux trois nombres $\frac{1}{\sin^2 A}, \frac{1}{\sin^2 B}, \frac{1}{\sin^2 C}$. Les figures ci-après illustrent, pour $A > B > C$, la déformation de la courbe en fonction de μ (le nombre de cas diminue évidemment si le triangle est isocèle et a fortiori équilatéral).

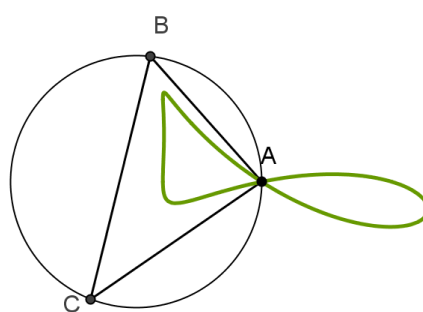
N.B. : Les raisonnements précédents s'adaptent sans problème majeur au cas où le triangle ABC a un angle obtus. L'allure des courbes change un peu.



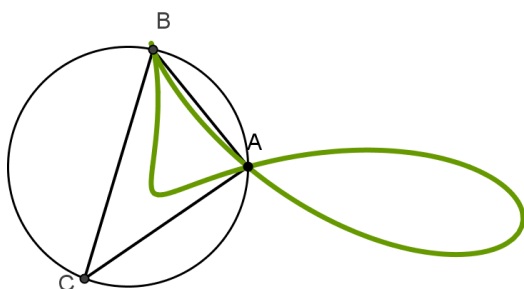
$$1 < \mu < \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$$



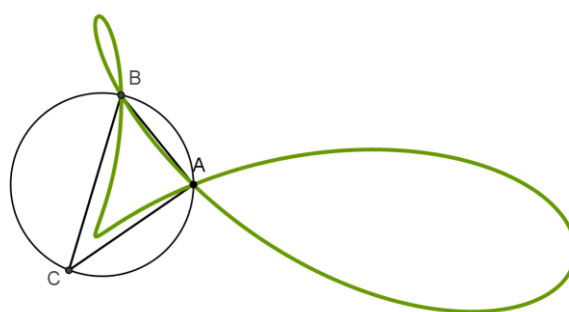
$$\mu = \frac{1}{\sin^2 \hat{A}}$$



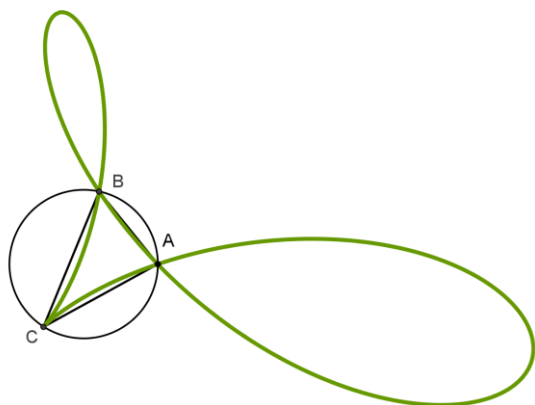
$$\frac{1}{\sin^2 \hat{A}} < \mu < \frac{1}{\sin^2 \hat{B}}$$



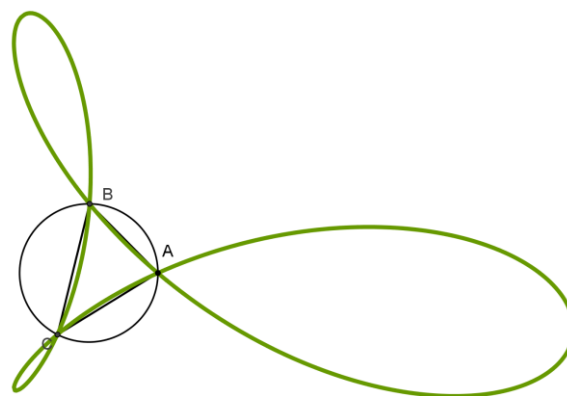
$$\mu = \frac{1}{\sin^2 \hat{B}}$$



$$\frac{1}{\sin^2 \hat{B}} < \mu < \frac{1}{\sin^2 \hat{C}}$$



$$\mu = \frac{1}{\sin^2 \hat{C}}$$



$$\mu > \frac{1}{\sin^2 \hat{C}}$$

Annexe : indications sur les théorèmes (T) et (T')

1. Le théorème (T)

Ce théorème résulte du « théorème de Bézout » :

Deux courbes algébriques distinctes et non décomposées, de degrés respectifs m et p , ont mp points d'intersection, ceux-ci étant comptés avec leur ordre de multiplicité.

Ici, étant donné une quartique $\mathcal{Q}$ à quatre points singuliers A, B, C, D , dont trois quelconques ne sont pas alignés, on veut prouver que $\mathcal{Q}$ est décomposée. On considère un cinquième point E de $\mathcal{Q}$. Par ces cinq points passe une conique $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{K}$ ne sont pas décomposées, elles ont huit points d'intersection, alors qu'on en compte neuf : A, B, C, D , comptés chacun au moins deux fois, et E . Une des deux courbes est donc décomposée. Si c'est $\mathcal{Q}$ le travail est terminé. Si c'est $\mathcal{K}$, l'une des deux droites formant $\mathcal{K}$ contient trois des cinq points et a donc au moins cinq points d'intersection avec $\mathcal{Q}$, qui est donc décomposée.

Démonstration artisanale

On peut éviter le recours au théorème de Bézout comme suit. Soit $F(x, y) = 0$ l'équation de $\mathcal{Q}$. Par les quatre points singuliers A, B, C, D et par un cinquième point E de $\mathcal{Q}$ passe une conique $\mathcal{K}$.

- Si $\mathcal{K}$ n'est pas décomposée, elle admet un paramétrage $x = X(t) = \frac{P(t)}{R(t)}$, $y = Y(t) = \frac{Q(t)}{R(t)}$ où P, Q, R sont des polynômes de degré 2.

Considérons la fonction $\Phi(t) = F(X(t), Y(t))$; on a $\Phi'(t) = F'_x \frac{dX}{dt} + F'_y \frac{dY}{dt}$. Si le point $(X(t_0), Y(t_0))$ est un point singulier de $\mathcal{Q}$, la dérivée $\Phi'(t_0)$ est nulle. L'équation $\Phi(t) = 0$, qui donne les valeurs de t correspondant aux points d'intersection de $\mathcal{Q}$ et $\mathcal{K}$, a donc t_0 comme racine au moins double.

Nous connaissons donc au moins neuf zéros de Φ : quatre zéros doubles correspondant à A, B, C, D et un zéro correspondant à E . Or si on écrit explicitement $F(x, y) = \sum_{j+k \leq 4} x^j y^k$, l'équation $\Phi(t) = 0$ s'écrit, après suppression des dénominateurs :

$$\sum_{j+k \leq 4} P(t)^j Q(t)^k R(t)^{4-j-k} = 0$$

Le polynôme premier membre est au plus de degré 8, alors qu'il a au moins neuf zéros. Il est donc identiquement nul et $\mathcal{Q}$ contient $\mathcal{K}$.

- Si $\mathcal{K}$ est décomposée, l'une des deux droites formant $\mathcal{K}$ contient trois des cinq points A, B, C, D, E . On refait le même raisonnement en paramétrant cette droite : on aboutit à une équation de degré au plus 4 ayant au moins 5 racines.

2. Le théorème (T')

La démonstration ci-dessous glisse discrètement sur bon nombre de difficultés, mais elle rend plausible le résultat.

Soit une quartique $\mathcal{Q}$ à trois points doubles non alignés A, B, C et un quatrième point D de $\mathcal{Q}$, d'équation $F(x, y) = 0$. Les coniques passant par ces quatre points forment un faisceau, c'est-à-dire que leur équation est de la forme $G(x, y) + \mu H(x, y) = 0$, où μ est un paramètre.

Notons que par tout point de $\mathcal{Q}$ passe une conique K_μ du faisceau et une seule.

Les points d'intersection de $\mathcal{Q}$ et K_μ sont donnés par :

$$\begin{cases} F(x, y) = 0 \\ G(x, y) + \mu H(x, y) = 0 \end{cases}$$

En éliminant y entre ces deux équations, on obtient une équation $R(x, \mu) = 0$, où R est un polynôme de degré le produit des degrés des deux équations ci-dessus, soit $4 \times 2 = 8$.

Dans l'équation $R(x, \mu) = 0$, considérée comme une équation en x , sept des racines sont connues : les abscisses de A, B, C , comptées chacune deux fois, et l'abscisse de D . La somme des racines est une fonction rationnelle de μ , donc aussi la huitième racine.

Le huitième point d'intersection de $\mathcal{Q}$ et K_μ a donc une abscisse fonction rationnelle de μ ; il en est évidemment de même pour son ordonnée.