Complément à l'article
"Comment un problème peut en cacher beaucoup d'autres"
publié dans le Bulletin n° 491

François Duc[1]

Dans le bulletin de l'APMEP n°480 p 60, Louis Rivoallan a formulé une conjecture relativement à la fonction Q définie par $Q(M)=aire(O_aO_bO_c)/aire(ABC)$, où M est un point du plan ABC distinct de A,B,C et O_a,O_b,O_c sont les centres respectifs des cercles circonscrits à (MBC) (MCA) (MAB).

J'ai démontré que l'ensemble des points M tels que $Q(M)=|k|$ (ou $Q(M)=\mu$ en aires algébriques) sont des quartiques bicirculaires (L_k) ou (L_μ). Cette étude a été reprise et publiée dans le BV 491 p. 724. Dans les deux versions (L_k) ou (L_μ) sont définies analytiquement, mais avec des repères différents, et construites à l'aide d'un paramétrage obtenu en coupant les courbes par une droite pivotant autour de A.

N'étant pas très satisfait de la construction obtenue, j'ai trouvé un dessin de (L_k) simple rapide et peu calculatoire et qui de plus met en évidence l'orthocentre H de (ABC) (on savait déjà que $(L_1)=\{H\}$).
Avec GeoGebra la construction est facile (cf "dessin F.D. (Lk) et H") :

On privilégie deux sommets d'angles aigus, par exemple B et C.

N_c est un point variable sur le cercle (cH) de centre H et de rayon r_cK, avec $K = \sqrt{\frac{k-1}{k}}$ et $r_c = 2R\cos(C)$, R rayon du cercle (cO) de centre O circonscrit à ABC.
N_b est image de N_c dans la similitude directe de centre H, d'angle $(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + (\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB})$, de rapport $\frac{\cos(B)}{\cos(C)}$.

(L_k) est le lieu géométrique des points M intersection des droites (CN_c) et (BN_b) lorsque N_c décrit le cercle (cH).

Les dessins confirment les résultats connus :

- pour K = 0 :(L1)={H};
- pour K = 1 : (L+/-oo)=(AB)U(BC)U(CA) ;
- pour $K = +\infty$: (L_0) = (cO).

Mais cette construction a été obtenue après des démarches très longues, à savoir un paramétrage de (L_k) rationnel en cos(t) et sin(t), t repérant N_c sur (cH). De plus un logiciel de calcul formel (Maple) m'a été indispensable, des calculs de développements étant impossibles à la main.

Epilogue : mon collègue Bernard Gibert[2] a mis un point final à ce problème.
En contournant tout paramétrage, il a établi rapidement des dessins très simples et sans calcul.
Voici ses deux solutions :

1°)Analytique :
On utilise les coordonnées barycentriques pour établir l'équation de la quartique :
$$16k(aireABC)^2\, xyz(x+y+z) = (a^2yz + b^2zx + c^2xy)^2.$$
On voit tout de suite qu'elle est bicirculaire avec A,B,C points doubles.

[1] frsidu@orange.fr
[2] Le site internet de Bernard Gibert est : http://bernard.gibert.pagesperso-orange.fr/

Son isogonale[3], d'équation $16k(\text{aireABC})^2(a^2yz + b^2zx + c^2xy) = a^2b^2c^2(x+y+z)^2$,

est un cercle de centre O et de rayon RK, où R est le rayon de (cO) et $K = \sqrt{\frac{k-1}{k}}$.

Il suffit de tracer ce cercle et de le transformer par isogonalité, ce qui est très simple :
voir les deux dessins GeoGebra "dessin B.G.(Lk) passant par M" ; "dessin B.G.(Lk) ,K variable".

2°)Entièrement géométrique:
Si $A_mB_mC_m$ est le triangle antipodaire de M, M* l'isogonal de M, $P_aP_bP_c$ le triangle podaire de M*, alors :
1° $O_aO_bO_c$ et $A_mB_mC_m$ sont homothétiques par rapport à M , dans le rapport 2 ;
2° $A_mB_mC_m$ et $P_aP_bP_c$ sont homothétiques et le produit de leurs aires est $(\text{aireABC})^2$;
3° l'aire de $O_aO_bO_c$ est donc :$(\text{aireABC})^2/(2(\text{aire}P_aP_bP_c)$;
4° le lieu des points M* tels que l'aire de $P_aP_bP_c$ est constante est un cercle de centre O ;
5° le lieu des points M est donc l'isogonale de ce cercle, soit une quartique bicirculaire de noeuds A,B,C.

Je tiens à remercier Pierre Auffray en particulier pour la création d'un logiciel Maple donnant une solution approchée d'un système quelconque de n équations à p inconnues ($p \leq n$), Marc Roux qui a suivi mon travail, Robert Ferréol auteur du site internet "mathcurve"[4], et bien sûr Bernard Gibert.

[3] La transformation par isogonalité est l'involution qui à M fait correspondre M' intersection des droites (BM_b) et (CM_c), M_b et M_c étant les symétriques respectifs de M par rapport aux bissectrices intérieures des angles B et C du triangle ABC .

[4] Les équations et le dessin géométrique de la courbe« poisson », répertoriée dans« mathcurve », sont au point de départ du paramétrage trigonométrique.