



This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-NonCommercial-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/).

Construire les nouveaux nombres au Cycle 3

Fractions et décimaux

DES SITUATIONS A L'ARTICULATION ÉCOLE-COLLÈGE

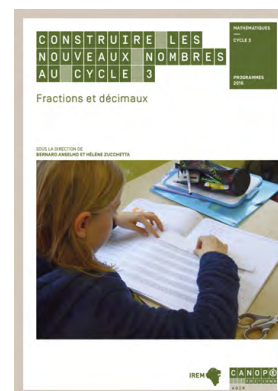
Présentation

GROUPE ÉCOLE COLLÈGE DE L'IREM DE LYON

Une réflexion sur l'enseignement des fractions et décimaux



- menée depuis une vingtaine d'années
- qui a conduit à une première publication en 1999,
- depuis largement utilisée par des enseignants de collège.
- Réflexion, qui a été reprise à l'annonce de la création du nouveau cycle 3,
- étendue à tout le cycle, du CM1 jusqu'à la sixième,
- et dont l'aboutissement est une nouvelle publication à l'intention des équipes d'enseignants inter-degrés.



Avertissement

- Les difficultés rencontrées par nos élèves montrent que les questions posées par l'enseignement des fractions et décimaux sont nombreuses et complexes
- Cet atelier d'une heure trente ne permettra pas d'en faire le tour, ni d'interroger en profondeur toutes ces notions et leurs aspects conceptuels.
- Nous avons fait le choix de le centrer autour de l'étude d'activités pour la classe.
- Nous espérons ainsi alimenter une réflexion commune et vous offrir quelques pistes d'enseignement pour vos classes.

Exercice 30

a) Donne le résultat de 23×10

Réponse : **88,9% de réussite**

b) Donne le résultat de $35,2 \times 100$

Réponse : **31,6 % de réussite**

b. Donne le résultat :

$$35,2 \times 100$$

Réponse : 350,200.....

b. Donne le résultat :

$$35,2 \times 100$$

Réponse : 3500,200

**28,9 % répondent :
3500,2 ou 35,200 ou 3500,200**

Evaluation 6e 2008

Entoure la fraction égale à 80,4.

$$\frac{804}{100}$$

$$\frac{80}{4}$$

$$\frac{84}{10}$$

$$\frac{804}{10}$$

$$\frac{804}{1000}$$

<u>804</u> 10	48,9%
<u>80</u> 4	21,2%
<u>804</u> 100	7,8%
Autres réponses	20,5%

Evaluation 6e 2008

Parmi les écritures ci-dessous, entoure celle qui est égale à $96 + \frac{2}{100}$.

96,200

962,100

296

96,02

98,100

96,02	54,5%
96,200	24,2%
Autres réponses	19,6%

Evaluation 6e 2008

a- Pe

b) $7,24 - 4,3$

b- M

c- Mé

écris les :

$$\begin{array}{r} 7,24 \\ - 4,3 \\ \hline 3,21 \end{array}$$

En début de 6^e

- 50% de réussite
- 8% des élèves répondent 3,21

Des difficultés et erreurs d'élèves

Ruptures et continuités

Les décimaux écrits avec une virgule ressemblent à des entiers, mais ne sont pas des entiers.

D'un point de vue conceptuel, ce sont des fractions.

L'écriture à virgule est un système, économique, de notation des décimaux. Il facilite les calculs mais il masque leur véritable nature.

Les programmes

UN NOUVEAU CYCLE 3 , DE NOUVEAUX PROGRAMMES

Quelles évolutions ?

PROGRAMME 2008

Compétence 3

L'élève est capable de :

écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples

PROGRAMME 2016 (ID. 2018)

Les fractions puis les nombres décimaux apparaissent comme de **nouveaux nombres** introduits pour pallier l'insuffisance des nombres entiers, notamment pour mesurer des longueurs, des aires et repérer des points sur une demi-droite graduée.

Programme 2016 (id. 2018)

Les indications du nouveau programme

Le lien à établir avec les connaissances acquises à propos des entiers est essentiel. Avoir une bonne compréhension des relations entre les différentes unités de numération des entiers (unités, dizaines, centaines de chaque ordre) permet de les prolonger aux dixièmes, centièmes, ...

Les caractéristiques communes entre le système de numération et le système métrique sont mises en évidence

L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales. Cela permet de mettre à jour la nature des nombres décimaux et de justifier les règles de comparaison (qui se différencient de celles mises en œuvre pour les entiers) et de calcul.

Les attendus de fin de cycle

PROGRAMME 2008

Compétence 3

L'élève est capable de :

écrire, nommer, comparer et utiliser les nombres entiers, les nombres décimaux (jusqu'au centième) et quelques fractions simples

utiliser les techniques opératoires des quatre opérations sur les nombres entiers et décimaux (pour la division, le diviseur est un nombre entier) ;

PROGRAMME 2016 (ID 2018)

Attendus de fin de cycle

Utiliser et **représenter** les grands nombres entiers, des fractions simples, les nombres décimaux

Calculer avec des nombres entiers et des nombres décimaux

Résoudre des problèmes en utilisant des fractions simples, les nombres décimaux et le calcul

Repères de progressivité (2016)

On commence dès le CM1 l'étude des fractions simples (comme $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{2}$ et des fractions décimales)

Du CM1 à la 6ème, **on aborde différentes conceptions possibles de la fraction, du partage de grandeurs jusqu'au quotient de deux nombres entiers**, qui sera étudié en 6ème.

Pour les nombres décimaux, les activités peuvent se limiter aux centièmes en début de cycle pour s'étendre aux dix-millièmes en 6ème.

Les compétences à développer

➤ Chercher :

- Prélever et organiser les informations ...
- S'engager dans une démarche...
- Tester, essayer

➤ Modéliser

- Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.
- Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.

➤ Représenter

- Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.

➤ Raisonner

- Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
- Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose

➤ Calculer

- Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).
- Contrôler la vraisemblance de ses résultats.
- Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier

➤ Communiquer

- Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées ..., exposer une argumentation.
- Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.,,

Lien avec les domaines du socle

- Utiliser les **principes du système décimal de numération et les différentes écritures d'un nombre décimal** pour effectuer des calculs, utiliser une droite graduée et modéliser des situations contribuent **développement des langages pour penser et communiquer (domaine 1)**.
- En s'engageant dans une **démarche de résolution de problème** nécessitant l'utilisation de fractions et/ou de nombres décimaux, en mettant à l'**essai plusieurs solutions**, en mobilisant les connaissances nécessaires, en analysant et en **exploitant les erreurs**, développe **des méthodes et des outils pour apprendre (domaine 2)**
- L'engagement dans un **travail collectif** lui permet de développer, dans des situations concrètes, son **aptitude à coopérer, à vivre ensemble et à faire preuve de responsabilité (domaine 3)**
- La pratique du **calcul** (mental et en ligne, posé, exact et approché), l'estimation d'ordres de grandeurs avec des nombres décimaux contribuent à l'**étude des systèmes naturels et des systèmes techniques (domaine 4)**

La résolution de problèmes

La **résolution de problèmes** constitue le critère principal de la maîtrise des connaissances dans tous les domaines des mathématiques, mais elle est également **le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens**.

La résolution de problèmes permet déjà de montrer comment **des notions mathématiques peuvent être des outils pertinents pour résoudre certaines situations**.

Les situations sur lesquelles portent **les problèmes** sont, le plus souvent, issues d'autres enseignements, de la **vie de classe ou de la vie courante**. Les élèves fréquentent également des **problèmes issus d'un contexte interne** aux mathématiques.

Des problèmes ?

POUR DONNER DU SENS

Consigne

Voici des propositions d'activités pour la classe

→ Commencer par faire l'activité afin de l'étudier pour pouvoir ensuite présenter vos réflexions aux autres.

- *Que peuvent faire les élèves?*
- *Comment pourrait-on exploiter leurs réponses?*
- *Quelles sont les connaissances nécessaires et à quel(s) moment(s) du cycle serait-il intéressant de la proposer ?*
- *Dans quel(s) objectif(s) ?*

Sur les fractions

DES ACTIVITÉS DE RÉFÉRENCE

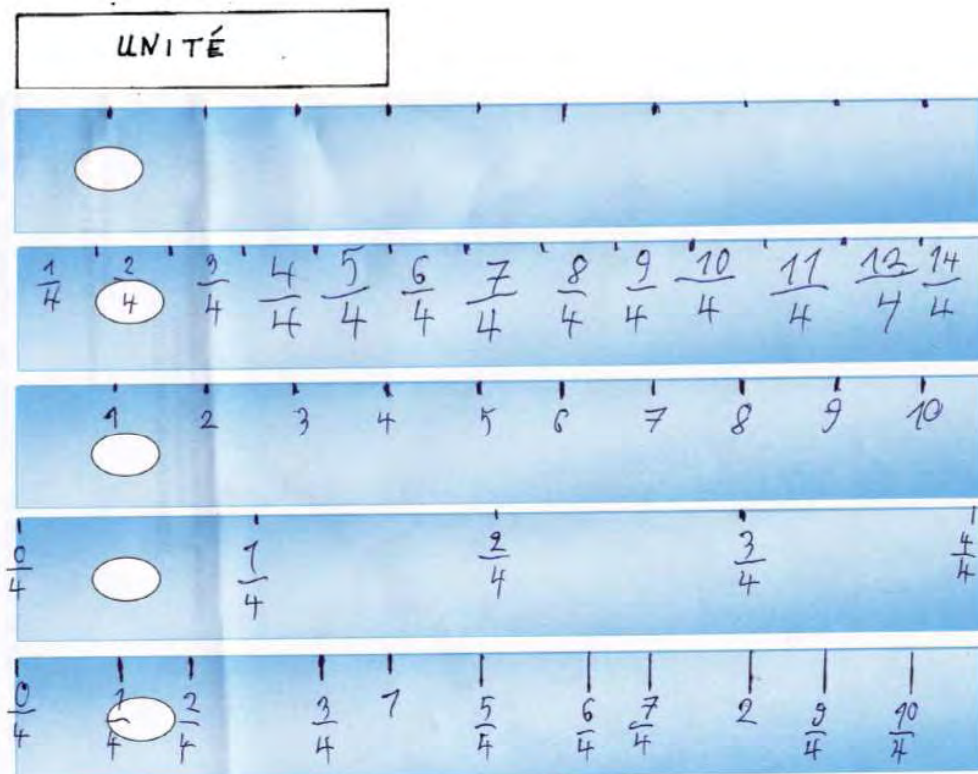
REGLES GRADUEES

(d'après « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 Fractions et décimaux » - Canopé)

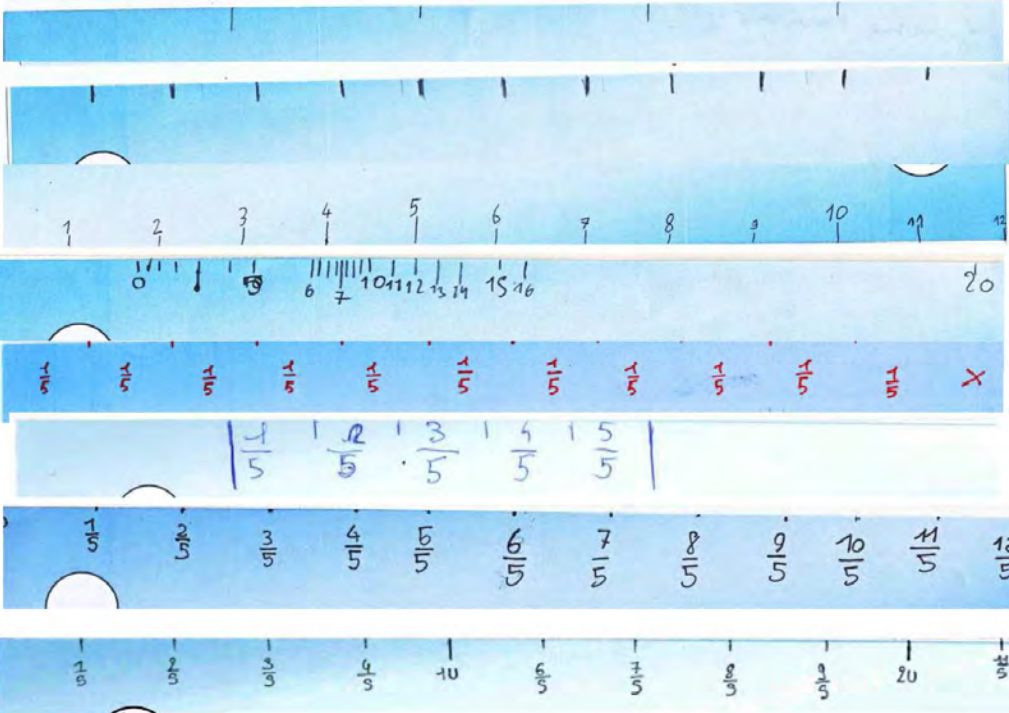
- Les élèves sont invités à construire des « règles » graduées en fractions d'unité donnée.
- Après avoir dégagé les critères d'une bonne graduation, ils utilisent de telles règles pour construire des segments de longueurs données puis pour mesurer sur une demi-droite des segments dont une extrémité est l'origine de cette demi-droite.



unité



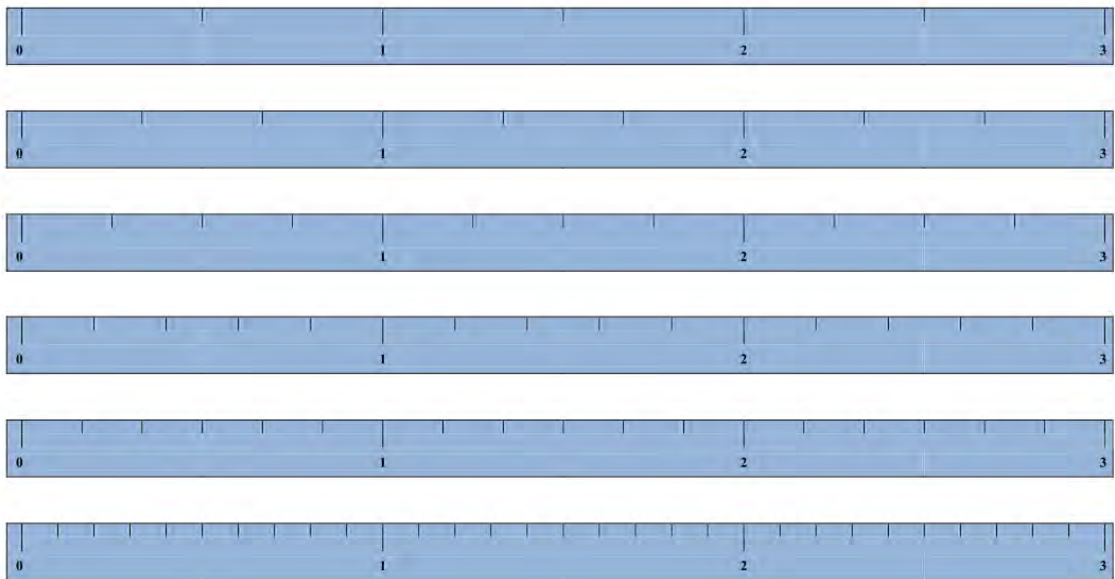
unité



A
B
C
D
E
F
G
H

Situation 3 – Annexe 3 bis

unité



DES BONBONS RUBANS

(d'après « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 Fractions et décimaux » - Canopé)

- Dans cette activité, les élèves disposent de deux « bonbons » rubans : un ruban A qui mesure $3u$, un ruban B qui mesure $8u$.
- Ils doivent trouver combien de fois la longueur du ruban A est contenue dans celle du ruban B.

Bonbon ruban A

Bonbon ruban B



Écriture décimale

DES ACTIVITÉS DE RÉFÉRENCE

L'APPRENTI COMPTABLE

(d'après « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 Fractions et décimaux » - Canopé)

- Les élèves se retrouvent plongés en l'an 1500, ils doivent trouver comment faire pour additionner des nombres écrits à l'aide de fractions décimales ;
- Les méthodes proposées sont fastidieuses ; la découverte de Stevin « les nombres de Disme », est alors exposée aux élèves...

Tu dois effectuer la somme des trois quantités écrites dans les cadres ci-dessous :

$$27u + \frac{8}{10}u + \frac{4}{100}u + \frac{7}{1000}u$$

$$37u + \frac{6}{10}u + \frac{7}{100}u + \frac{5}{1000}u$$

$$875u + \frac{7}{10}u + \frac{8}{100}u + \frac{2}{1000}u$$

Effectue l'addition suivant la méthode que tu peux imaginer en vigueur à cette époque.

SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPÉRATION.

R A T I O N .

⑥	①	②	③
2	7	8	4
3	7	6	7
8	7	5	7
8	7	5	7
8	7	5	7
9	4	1	3
9	4	1	3

N I, DE
ON.
à ajouter : Trouver leur
ordres de nombres de
⑥①②③, le deux-
sme 875⑦①8②③.ut

trouver leur somme. *Construction.*
On mettra les nombres donnez
en ordre comme ci joignant, les
aiouster selon la vulgaire maniere
d'aiouster nombres entiers, en ceste
sorte:

⑥	①	②	③
2	7	8	4
3	7	6	7
8	7	5	7
8	7	5	7
8	7	5	7
9	4	1	3

végoupa

Yes nombres
trouver

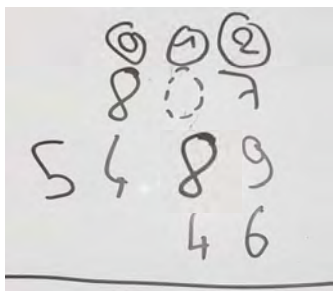
unites (entiers).

En 6^{ème}, suite à l'étude du texte de Stevin,
 utiliser la méthode de Stevin pour additionner ensemble les 3 nombres
 écrits "à l'ancienne" :

$$8 + \frac{7}{100}$$

$$54 + \frac{8}{10} + \frac{9}{1000}$$

$$\frac{4}{10} + \frac{6}{100}$$



En 6^{ème}, suite à l'étude du texte de Stevin,
 utiliser la méthode de Stevin pour additionner ensemble les 3 nombres
 écrits "à l'ancienne" :

$8 + \frac{7}{100}$ $54 + \frac{8}{10} + \frac{9}{1000}$ $\frac{4}{10} + \frac{6}{100}$

$= \frac{800}{1000} + \frac{7}{100} = \frac{807}{100}$

$\frac{9}{1000} = \frac{54000}{10000} + \frac{8}{10} = \frac{800}{1000} + \frac{8}{1000} = \frac{54809}{1000}$

$\frac{4}{10} + \frac{6}{100} = \frac{46}{100}$

Etape 2
 $\begin{array}{r} 8070 \\ + 460 \\ + 54809 \\ \hline 63339 \end{array}$ $\frac{63339}{1000}$

Sur les décimaux

DES ACTIVITÉS DE RÉFÉRENCE

novembre 18

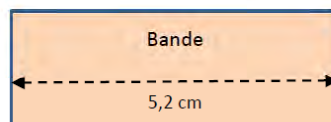
BERNARD ANSELMO - BRUNO ROZANES - SOPHIE ROUBIN - STEPHANIE EVESQUE - GROUPE ECOLE - COLLÈGE IREM DE LYON

38

LA BONNE BANDE

(d'après « Construire les nouveaux nombres au cycle 3 Fractions et décimaux » - Canopé)

- Dans cette activité, les élèves doivent utiliser une des deux bandes pour construire sans utiliser leur règle un segment de longueur $5,2 \times 4,5$ cm



La règle graduée est interdite



novembre 18

BERNARD ANSELMO - BRUNO ROZANES - SOPHIE ROUBIN - STEPHANIE EVESQUE - GROUPE ECOLE - COLLÈGE IREM DE LYON

42

Quelle progression ?

Une proposition en quatre temps

1. Débuter avec les fractions

Quatre premières situations qui se déroulent dans le contexte des longueurs. Elles sont accessibles dès le CM1 mais des aménagements sont proposés pour qu'elles puissent être mises en œuvre ou reprises plus tard dans le cycle.

- **Des fractions pour mesurer**
- **Un nouvel outil pour partager : la « machine à partager » (guide-âne)**
- **Fractions et graduations**
- **Écritures équivalentes**

Une proposition en quatre temps

2. Construire le nombre décimal

Cette partie vise à introduire l'écriture décimale et à interroger sa signification dans la construction de techniques opératoires sur les nombres décimaux. Les deux premières peuvent être proposées en CM1 ou plus tard dans le cycle avec des aménagements prévus. Les deux suivantes sont plus adaptées à des élèves de CM2 ou fin de cycle.

- **Fractions décimales**
- **Écriture décimale**
- **Fractions de surfaces**
- **Multiplication d'un décimal par un entier**

Une proposition en quatre temps

3. Découvrir la fraction quotient

Ces trois situations portent sur les relations entre multiplication, division et fractions. Elles ont été conçues pour être proposées en fin de cycle.

- **Division et multiplication**
- **Vers la fraction quotient**
- **Fraction quotient**

Une proposition en quatre temps

4. Enrichir la multiplication

Ces situations visent à donner un nouveau sens à la multiplication autre que celui de l'addition réitérée. Elles sont proposées dans des contextes de grandeurs différentes et sont conçues pour la fin du cycle.

- **Multiplication et longueur**
- **Multiplication et proportionnalité**
- **Multiplication et aire**

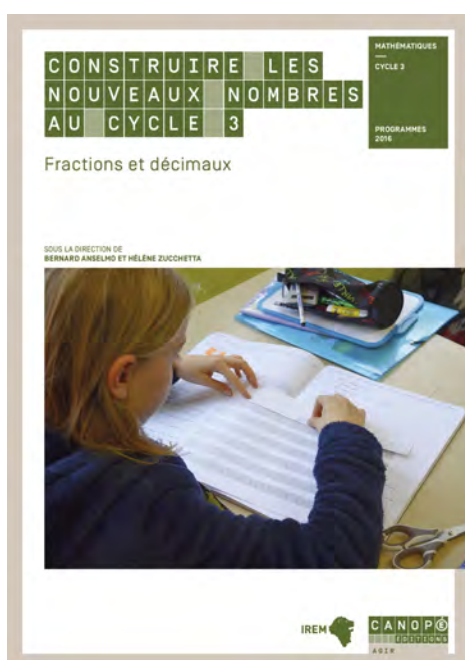
Un nouveau questionnement

Au cas où cela n'aurait pas déjà été rencontré

- Préciser les concepts-clefs qui font rupture
- Inventer des modalités nouvelles de recherche pour faire évoluer les dispositifs ?

En conclusion ?

- La résolution des problèmes proposés donne lieu à des situations de classe dans lesquelles l'élève agit. Elles servent de références.
- L'appui sur du matériel (réel, mieux que représenté) permet l'élaboration d'une représentation du nombre et des propriétés travaillées.
- À une désignation du nombre, orale ou écrite en chiffres, l'élève pourra associer une image mentale :
 - image d'une quantité en groupements d'unités
 - image d'une mesure d'une grandeur, une unité étant donnée
 - image d'une position sur une droite graduée.
- Ces représentations sont nécessaires à la construction du sens du nombre, et sont un préalable au calcul.



Site compagnon

<http://math.univ-lyon1.fr/irem/spip.php?rubrique217>

Programme 2016 cycle 4

Repère de progressivité (2016):

- **« Au cycle 3, les élèves ont rencontré des fractions simples sans leur donner le statut de nombres. »**
- **« Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. »**

Des précisions ?

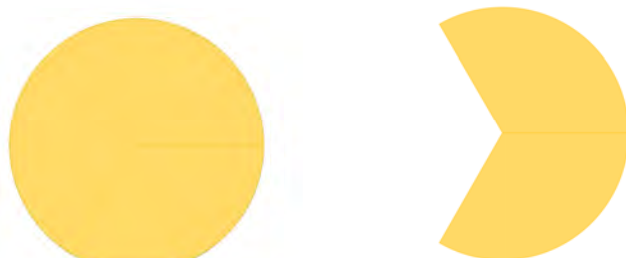
Le nombre décimal

L'écriture à virgule est présentée comme une convention d'écriture d'une fraction décimale ou d'une somme de fractions décimales.

Les conceptions de la fraction

Mesurage et partage de l'unité

$5/3$ de gâteau c'est « 5 fois $1/3$ de gâteau »



Partage d'une pluralité

$5/3$ de gâteau c'est la part de chacun lorsqu'on partage
« 5 gâteaux équitablement entre 3 personnes »



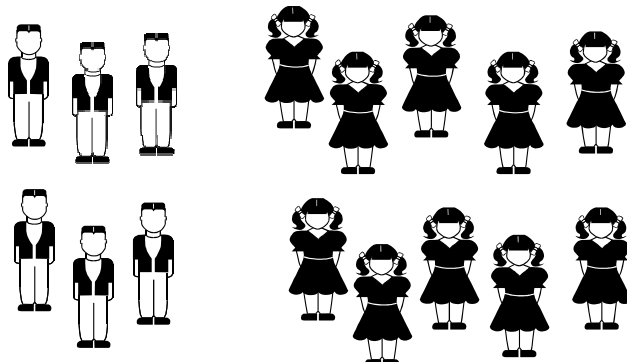
Fraction Quotient

$5/3$ c'est la solution de l'équation :

$$3 \times \dots = 5$$

Expression de rapports et de proportions

$5/3$ c'est 5 pour 3
et 5 est à 3
ce que 10 est à 6



Fractions = Nombres ?

Les rationnels

Ce sont des nombres qui s'écrivent sous
forme de fractions,

$$\frac{a}{b}$$

a entier
 b entier $\neq 0$

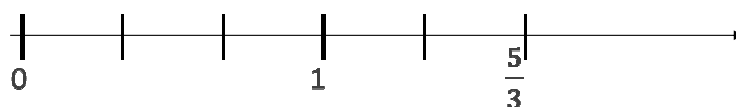
c'est-à-dire comme le quotient de
deux entiers naturels.

Mesure d'une grandeur

- $\frac{5}{3}$ L
- $\frac{5}{3}$ de gâteau
- $\frac{5m}{3s}$

Nombre « abstrait »

Qui permet de repérer



Qui permet de calculer

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{3} = \frac{5}{3}$$

Qui permet d'opérer

$$\frac{5}{3} \text{ fois } 15 \text{ €} = 25 \text{ €}$$

Programme 2016 cycle 4

Repère de progressivité (2016):

- **« Au cycle 3, les élèves ont rencontré des fractions simples sans leur donner le statut de nombres. »**
- **« Dès le début du cycle 4, les élèves construisent et mobilisent la fraction comme nombre qui rend toutes les divisions possibles. »**