La récurrence au fil des siècles

Pierre Legrand(*)

Introduction

La notion d'algorithme est depuis quelque temps offerte (avec des résultats qu'il serait intéressant d'évaluer) à des élèves de seconde dont la majorité pourtant n'ira pas vers les sciences. La récurrence, elle, n'apparaît qu'en terminale S et la descente infinie de Fermat est absente de l'enseignement secondaire.

On peut s'étonner de cette différence de traitement entre des concepts aussi intimement liés (que serait en effet l'algorithmique sans itérations ni tests d'arrêt ?). On peut y voir deux explications : une certaine tendance actuelle à privilégier les instruments de calcul face au raisonnement, une méfiance très ancienne envers tout ce qui touche à l'infini.

C'est sans doute cette méfiance ancestrale qui explique que récurrence et descente, entrevues dès l'Antiquité, aient eu besoin de deux millénaires pour voir leur mécanisme explicitement mis à jour. Et l'histoire n'est pas encore vraiment terminée.

A. De –300 à 1888

Le précurseur : Euclide

On fait souvent remonter la récurrence à Euclide, ce qui est à la fois vrai et faux. L'exemple habituellement donné est la proposition 20 du livre IX des *Éléments* (composés vers l'an 300 avant notre ère), où est prouvée l'existence d'une quantité arbitrairement grande de nombres premiers. Après avoir montré que tout nombre a au moins un diviseur premier, Euclide établit [1] que si l'on dispose d'une collection de nombres premiers (dans le texte, il part d'une collection de trois nombres A, B, C), on peut toujours trouver un nombre premier qui n'y figure pas : ou bien ABC + 1 est premier, ou bien il a un diviseur premier qui ne peut évidemment être ni A ni B ni C. Autrement dit, à toute liste de nombres premiers on peut en adjoindre un de plus. Il y a donc l'esquisse d'une récurrence, mais elle n'est pas explicitée ; en outre l'idée d'une infinité de nombres premiers est absente.

On a vu de même dans les *Éléments* un premier exemple de descente infinie : le fameux algorithme [2] du PGCD (livre VII, proposition 2) est effectivement un processus de descente. Mais, bien qu'Euclide ait manifestement conscience du fait qu'on peut aller aussi loin que nécessaire, il décrit une démarche type comportant trois étapes ; ni le fait que l'on arrive à bon terme dans tous les cas ni le fait que le nombre de pas puisse être supérieur ou inférieur à trois ne sont évoqués.

(*) p.m.legrand@sfr.fr

L'idée d'infini répugnait d'ailleurs passablement à la mentalité grecque. On peut y voir des raisons philosophiques, nombre de penseurs de l'époque estimant que l'univers était limité (et sphérique, la forme parfaite). On peut y voir en outre des raisons proprement mathématiques : l'absence de la notion de variable (une formule telle que « passer de n à $n+1$ » est impensable à l'époque), mais aussi tout bêtement l'absence d'un système de numération efficace. La notation grecque des entiers permettait de compter gentiment jusqu'à dix mille, mais au-delà les choses se compliquaient au point qu'Archimède a dû écrire un traité, *l'Arénaire*(1), essentiellement consacré à la construction d'une méthode permettant d'atteindre les très grands nombres.

Parler d'Archimède amène à se poser une question. Le plus grand mathématicien de l'Antiquité a-t-il utilisé la récurrence ? La réponse est, comme pour Euclide, oui et non. Dans son traité *De la mesure du cercle* [3], il démontre la double inégalité $3+\frac{10}{71}<\pi<3+\frac{1}{7}$ par un procédé récurrent : il utilise des polygones inscrits et circonscrits dont il double quatre fois de suite le nombre de côtés. Le processus est si manifestement itérable qu'à la fin du XVI$^{\text{e}}$ siècle Adriaan van Roomen (*alias* Adrianus Romanus) put, en le reprenant de façon beaucoup plus poussée, obtenir 16 décimales de π. Mais, pas plus qu'Euclide, Archimède n'évoque la possibilité d'aller plus loin qu'il ne fait.

Les pères fondateurs : Pascal et Fermat

Il existe d'assez nombreux exemples, européens ou non (arabes notamment), d'utilisation implicite des principes de récurrence ou de descente infinie avant le XVII$^{\text{e}}$ siècle. Fibonacci, vers 1200, se sert de l'un et de l'autre (sans le dire, bien sûr) : en témoignent sa fameuse suite $u_{n+1}=u_n+u_{n-1}$ et son algorithme(2) de décomposition d'un rationnel en somme de fractions distinctes de numérateur 1. Il semble bien cependant que Pascal, pour la récurrence, et Fermat, pour la descente infinie, soient les premiers à avoir énoncé nettement ces principes et à en avoir reconnu la puissance et la généralité.

Voici ce que dit Pascal à la page 7 de son *Traité du triangle arithmétique* [4] de 1654, à propos de la formule que nous notons maintenant $\binom{n}{p}=\binom{n}{p-1}\frac{n-p+1}{p}$, qu'il démontre par récurrence sur n :

> Quoi(3) que cette proposition ait une infinité de cas, j'en donnerai une démonstration bien courte, en supposant deux lemmes.

(1) Il s'agissait de majorer le nombre de grains de sable que pourrait englober l'univers connu des Anciens.

(2) Voir dans le Bulletin vert n° 503 l'article « Calculer comme les Égyptiens ».

(3) J'ai modernisé l'orthographe, mais laissé la ponctuation en l'état. Même chose pour les citations de Fermat.

> Le 1. qui est évident de soi-même, que cette proportion se rencontre dans la seconde base […].
> Le 2. que si cette proportion se trouve dans une base quelconque, elle se trouvera nécessairement dans la base suivante.
> D'où il se voit, qu'elle est nécessairement dans toutes les bases : car, elle est dans la seconde base par le premier lemme, donc par le second elle est dans la troisième base, donc dans la quatrième, *et à l'infini*.(4)
> Il faut donc seulement démontrer le second lemme […]

On voit clairement ici le progrès réalisé. Au langage près, on est bien en présence d'une récurrence telle que nous la pratiquons : l'initialisation par le lemme 1 (ici on commence à $n = 2$), puis par le lemme 2 passage d'un terme au suivant, indéfiniment répété.

Le principe de la descente infinie peut se formuler ainsi : « toute suite strictement décroissante d'entiers naturels est une suite finie. » Le texte fondateur en la matière figure dans une lettre [5] de Fermat adressée en août 1659 à son ami Pierre de Carcavi, amateur éclairé qui a correspondu avec toute l'élite scientifique de son époque.

> Et pour ce que les méthodes ordinaires, qui sont dans les livres, étaient insuffisantes à démontrer des propositions si difficiles, je trouvai enfin une route tout à fait singulière pour y parvenir.
> J'appelai cette manière de démontrer la *descente infinie ou indéfinie* […].

Notons au passage que, des deux termes proposés par Fermat, celui de *descente infinie* qu'a retenu la postérité n'est pas le meilleur : ce qui fait l'efficacité de cette démarche, c'est justement qu'elle ne peut avoir qu'un nombre fini d'étapes.

Il expose ensuite sa méthode à propos du théorème suivant : il n'y a pas de triangle rectangle à côtés entiers dont l'aire soit le carré d'un entier.

> S'il y avait aucun [*au sens ancien* : un quelconque] triangle rectangle [*sous-entendu* : à côtés entiers] qui eût son aire égale à un carré, il y aurait un autre triangle moindre que celui-là qui aurait la même propriété. S'il y en avait un second, moindre que le premier, qui eût la même propriété, il y en aurait, par un pareil raisonnement, un troisième, moindre que ce second, qui aurait la même propriété et enfin un quatrième, un cinquième, etc. à l'infini en descendant. Or est-il qu'étant donné un nombre, il n'y en a point infinis en descendant [*c'est-à-dire* : il n'y a pas de suite infinie décroissante] moindres que celui-là (j'entends parler toujours des nombres entiers).

Les successeurs

Les deux principes ayant ainsi été clairement mis en place, on pourrait imaginer que les mathématiciens de l'époque se sont précipités sur ces deux superbes jouets, mais il n'en a rien été(5). On peut y voir deux raisons : l'essor foudroyant de l'analyse, des

(4) C'est moi qui souligne.
(5) *L'histoire des mathématiques* de Charles Bossut, publiée en 1810, mentionne en bonne place Fermat et surtout Pascal, mais ne fait allusion ni à la récurrence ni à la descente.

probabilités et de la mécanique, d'une part, et d'autre part la priorité alors donné à la découverte sur la démonstration.

Lorsque, en 1686, Jacob Bernoulli montre par récurrence la formule $1+2+3+\cdots+a=\frac{a^2+a}{2}$, il se croit obligé de décrire par le menu le mécanisme du travail. Cinquante ans plus tard, en 1735, quand le jeune Euler établit par récurrence sur a la relation $a^p \equiv a \pmod p$ pour p premier (petit théorème de Fermat), lui aussi entre dans des détails qui montrent bien que ce mode de raisonnement reste inhabituel.

Récurrence et descente ne deviendront des instruments peu à peu reconnus, grâce à Euler notamment, que dans la seconde moitié du XVIII$^{\text{e}}$ siècle. Et c'est au long du XIX$^{\text{e}}$ siècle que la communauté mathématique en viendra à les considérer d'abord comme un outil indispensable, puis comme la base même de l'édifice des nombres.

La naissance de l'axiomatisation

Les XVII$^{\text{e}}$ et XVIII$^{\text{e}}$ siècles avaient été une période de créativité presque anarchique, reléguant au second plan le souci de rigueur. Une remise en ordre étant devenue nécessaire, le XIX$^{\text{e}}$ siècle a dû progressivement s'attaquer à la consolidation des bases. C'est ainsi que sont apparues une construction des nombres complexes, puis une construction des rationnels, puis en 1872 la construction des réels [6] par les coupures de Dedekind(6), *édifiant ainsi tout l'édifice des nombres sur un socle unique : l'ensemble des entiers*.

Jusqu'au dernier quart du XIX$^{\text{e}}$ siècle, nul n'envisageait les entiers naturels autrement que comme une suite que l'on peut indéfiniment prolonger, ce que l'on a appelé un *infini potentiel*. Et cette suite restait considérée comme une donnée première, qu'il était hors de question de discuter (« Le Bon Dieu a fait les nombres naturels ; tout le reste est l'œuvre de l'homme(7) », disait Kronecker).

Des questions cependant commençaient à se poser, comme on le voit notamment dans le traité *Paradoxien des Unendlichen* (Paradoxes de l'infini) de Bolzano, paru en 1851 trois ans après sa mort. Mais le véritable choc a été créé par Cantor dans un retentissant article [7] de 1874, intitulé *Über eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen* (Sur une propriété du système de tous les nombres algébriques réels). Il y démontrait essentiellement deux points : on peut ranger l'ensemble des réels algébriques en une suite, il est impossible d'en faire autant pour l'ensemble des réels. Les mathématiciens se sont mis alors à s'intéresser de près aux ensembles infinis en eux-mêmes (*infini actuel*) et tout particulièrement à l'ensemble des entiers pris en bloc.

---

(6) Article « *Stetigkeit und irrationale Zahlen* » (Continuité et nombres irrationnels).
(7) « Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk." La phrase aurait été prononcée en 1886 lors de la réunion annuelle des « Berliner Naturforscher » (information communiquée par Daniel Reisz).

Il ne restait plus qu'une étape à franchir pour faire des mathématiques un système logique irréprochable : axiomatiser la construction des entiers, ce qui fut fait. Mais cette ultime et triomphale avancée s'est révélée un saut à pieds joints dans un marécage.

B. Construire ℕ par récurrence

En 1888 et 1889 parurent deux tentatives de construction de ℕ, *reposant l'une et l'autre sur la récurrence,* ℕ *y étant décrit comme le seul ensemble (à un isomorphisme près) qui peut être parcouru une fois et une seule à partir d'un élément initial par passage d'un terme au suivant indéfiniment répété.*

1888. Dedekind(8)

En 1888, Dedekind publia un opuscule intitulé *Was sind und was sollen die Zahlen ?*, autrement dit « Que sont les nombres et que doivent-ils être ? » [6]. Ce texte ne passa pas inaperçu, mais ne fit pas tellement de vagues. Pourtant, il aurait dû !

Jusqu'alors, en effet, les entiers naturels étaient considérés comme une donnée indiscutable et l'infini était envisagé comme une extrapolation à manipuler avec prudence. Dedekind a l'audace un peu folle de renverser totalement le point de vue : partir de l'infini, ce territoire suspect, pour légitimer ce qui nous est le plus familier, la suite 1, 2, 3, …

Avant d'entrer dans le détail, résumons sa démarche :

- définition d'un ensemble infini ;
- il existe des ensembles infinis ;
- définition d'un ensemble simplement infini ;
- il existe des ensembles simplement infinis ;
- les ensembles simplement infinis sont tous d'un même modèle, qu'on appelle ensemble des entiers naturels.

Le détail du texte

L'ouvrage se compose de 172 paragraphes numérotés. Les 35 premiers exposent une théorie informelle des ensembles(9). Les § 36 à 63 sont destinés à introduire le principe de récurrence. Ils traitent de ce que l'auteur appelle des « chaînes ». Étant donné une application f d'un ensemble E dans lui-même, une chaîne est une partie P de E telle que $f(\mathrm{P}) \subset \mathrm{P}$; la chaîne engendrée par une partie A est l'intersection, notée A_0, des chaînes contenant A [A_0 est évidemment la réunion de A et de ses images successives $f(\mathrm{A})$, $f(f(\mathrm{A}))$, $f(f(f(\mathrm{A})))$, … ce que Dedekind évite soigneusement de mentionner, *puisqu'il est censé ne pas connaître la suite des entiers*]. Il arrive ainsi à ce qu'il appelle « la base scientifique du raisonnement par récurrence » (§ 59 et 60) disant en substance ceci :

(8) Ce paragraphe doit beaucoup aux critiques pertinentes de Louis-Marie Bonneval.

(9) Dedekind n'utilise pas le terme « ensemble » (*Menge*), mais « système » (*System*).

> Pour démontrer que tous les éléments d'une chaîne A_0 ont une certaine propriété, il suffit de démontrer que tous les éléments de A ont la propriété et que l'image de tout élément qui a la propriété l'a aussi.

Les § 64 à 70 traitent du fini et de l'infini, un ensemble E étant dit infini si on peut le mettre en bijection avec une partie stricte A de lui-même ($A \subset E, A \neq E$). Dedekind n'a aucun mal à établir qu'il existe des ensembles finis (§ 65 : tout singleton est fini).

Mais le point crucial, dont dépend toute la construction de $\mathbb{N}$, est le très surprenant § 66 que voici[10] :

> *66. Théorème : Il existe des ensembles infinis*
> Le monde de mes pensées, c'est-à-dire l'ensemble S de toutes les choses qui peuvent être l'objet de ma pensée, est infini. Car si s désigne un élément de S, la pensée s' que s peut être l'objet de ma pensée est aussi un élément de S. Si nous considérons s' comme l'image $\varphi(s)$ de l'élément s, alors l'application φ ainsi déterminée est telle que $\varphi(S) \subset S$; en outre l'inclusion est stricte, car il y a dans S des éléments (par exemple la conscience que j'ai de moi) qui sont distincts de toute pensée s' et donc ne sont pas contenus dans $\varphi(S)$. Il est clair enfin que si a et b sont deux éléments distincts de S, leurs images a' et b' sont distinctes ; ainsi l'application φ est injective. Donc S est infini, CQFD.

Les § 71 à 73 sont les plus importants.

Au § 71, Dedekind y définit ce qu'il appelle un « ensemble[11] simplement infini $\mathbb{N}$ » par les propriétés suivantes :

α. $N' 3 N$.	α. Il existe une application φ de N dans N ;
β. $N = 1_0$.	β. N est la chaîne selon φ d'un de ses éléments noté 1 ;
γ. Das Element 1 ist nicht in N' enthalten.	γ. 1 n'appartient pas à $\varphi(N)$;
δ. Die Abbildung φ ist ähnlich.	δ. φ est injective.

Un tel ensemble constitue manifestement un décalque de $\mathbb{N}^*$, l'application φ correspondant à l'application qui à tout entier associe le suivant et la propriété β permettant (modulo le théorème établi aux § 59-60) d'utiliser le principe de récurrence.

Le § 72 démontre que tout ensemble infini contient une partie simplement infinie. Soit S un tel ensemble ; il existe une bijection φ de S sur une partie stricte de S. Si a appartient à S mais pas à $\varphi(S)$, on voit aisément que la chaîne engendrée par a (c'est-à-dire en fait l'ensemble formé de a et de ses images successives $\varphi(a)$, $\varphi(\varphi(a), \ldots))$ satisfait aux propriétés $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ et donc est simplement infinie.

Le § 73 est le couronnement de l'édifice. J'en cite le début :

(10) Dedekind signale très honnêtement que l'idée de cette « démonstration » vient de Bolzano qui, dans le § 13 de ses *Paradoxes de l'infini*, dit en substance ceci : étant donné une proposition A, la proposition « A est vraie » est une proposition B différente de A, mais « B est vraie » est une proposition C différente de B et A … et ainsi de suite indéfiniment.

(8) C'est donc Dedekind (et non, comme on le dit souvent, Peano) qui a introduit la notation $\mathbb{N}$ (initiale de Nummer, qui ne veut pas dire « nombre » mais « numéro »).

> Si dans la considération d'un ensemble simplement infini ℕ mis en ordre par une application φ on néglige entièrement le caractère spécifique des éléments pour ne retenir que les relations mutuelles dans lesquelles les place l'application φ, alors ces éléments sont appelés nombres naturels […]

La suite de l'article est une reconstitution des propriétés des entiers à partir de α, β, γ, δ.

Remarques

- Le ℕ de Dedekind ne part pas de 0, mais de 1.
- Les propriétés α, β, γ et δ encadrées ci-dessus ne sont pas présentées au § 71 sous l'étiquette « axiome », mais sous l'étiquette « définition » (*Erklärung*), les § 72 et 73 étant ensuite consacrés à établir l'existence et l'unicité (à un isomorphisme près) de l'objet auquel elles se rapportent

1889. Peano

L'année suivante, Peano publia un court traité, *Arithmetices principia, nova methodo exposita* [8], rédigé pour moitié en latin et pour moitié dans un langage formalisé de son invention. Le but déclaré de l'ouvrage n'était rien de moins que donner aux mathématiques un fondement irréprochable et d'en faire une sorte de mécanique du raisonnement. Voici une traduction des premières phrases :

> Les questions qui touchent aux fondements des mathématiques, bien que nombreux soient à notre époque ceux qui s'y sont attaqués, n'ont pas encore reçu de solution satisfaisante. La difficulté en la matière vient principalement de l'ambiguïté du langage.
> C'est pourquoi il importe au plus haut point de peser attentivement les termes utilisés. C'est cet examen que je me suis proposé, et j'expose dans ce texte le résultat de mes études et ses applications à l'arithmétique. […] Avec ces notations, toute proposition prend la forme et la précision dont jouissent en algèbre les équations […]

Le traité est en trois parties : une préface (en latin, bien sûr), un exposé du langage[12] formalisé de l'auteur (qui fait référence explicitement au calcul booléen), une construction axiomatique de ℕ :

Axiomata.

1. $1 \in N.$
2. $a \in N . \supset . a = a.$
3. $a, b, c \in N . \supset : a = b . = . b = a.$
4. $a, b \in N . \supset \therefore a = b . b = c : \supset . a = c.$
5. $a = b . b \in N : \supset . a \in N.$
6. $a \in N . \supset . a + 1 \in N.$
7. $a, b \in N . \supset : a = b . = . a + 1 = b + 1.$
8. $a \in N . \supset . a + 1 -= 1.$
9. $k \in K \therefore 1 \in k \therefore x \in N . x \in k : \supset_x . x + 1 \in k :: \supset . N \supset k.$

(12) Langage que Poincaré appelait sarcastiquement « le péanien » (*Science et Méthode*, ch.III, partie VII).

Cette fois, le mot « axiomes » est bien écrit (ou plutôt *axiomata*, latin oblige). Cette liste de 9 axiomes est un peu redondante (les axiomes 2, 3 et 4 ne sont autres que la réflexivité, la symétrie et la transitivité de l'égalité) ; l'axiome 9 est le principe de récurrence. Le contenu de ces axiomes est très proche de la définition donnée par Dedekind. Peano ne cache d'ailleurs pas ce qu'il doit à l'article de son prédécesseur dans lequel, dit–il, « les questions relatives aux fondements des nombres sont examinées de façon pénétrante ».

Notons que, comme Dedekind, Peano appelle $\mathbb{N}$ ce que nous appelons $\mathbb{N}^*$. Mais le fait de prendre 1 et non 0 comme point de départ ne change rien à la construction effectuée.

L'arithmétique de Peano

L'ouvrage fit beaucoup plus de bruit que celui de Dedekind et le terme « arithmétique de Peano » s'est maintenant imposé. Mais les « axiomes de Peano » sont maintenant présentés sous une forme plus condensée que la sienne et assez proche en fait de la présentation de Dedekind.

L'énoncé le plus courant semble être celui-ci :

1. $\mathbb{N}$ contient un élément appelé 0 ;
2. tout élément x de $\mathbb{N}$ a un successeur unique $s(x)$;
3. 0 n'est pas un successeur ;
4. si $s(x) = s(y)$, alors $x = y$;
5. une partie de $\mathbb{N}$ qui contient 0 et qui contient le successeur de chacun de ses éléments est égale à $\mathbb{N}$ (axiome de récurrence).

Il est assez facile mais long, de montrer, comme l'ont fait Dedekind et Peano, qu'à partir de ces axiomes on peut reconstituer l'ensemble des propriétés des entiers. La clé du raisonnement est l'utilisation répétitive de l'axiome 5, ou plus exactement de sa conséquence immédiate : si une propriété est vraie pour 0 et si, lorsqu'elle est vraie pour x, elle est vraie pour $s(x)$, alors elle est vraie dans $\mathbb{N}$ tout entier.

J'indique pour le principe les premières étapes, mais le lecteur peut sans remords passer au paragraphe suivant.

▪ *Tout élément non nul de* $\mathbb{N}$ *est un successeur* : en effet la partie constituée de 0 et des successeurs satisfait aux hypothèses de l'axiome de récurrence ; c'est donc $\mathbb{N}$ tout entier.

▪ Pour définir l'*addition*, on pose d'abord $x + 0 = x$, puis on définit par récurrence $x + y$ en posant, pour tout m, $x + s(m) = s(x + m)$. La commutativité et l'associativité se démontrent (par récurrence, bien sûr) de façon aussi aisée que fastidieuse ; je laisse au lecteur scrupuleux le soin de le faire.

Si on appelle 1 le successeur de 0, on a en particulier $x + 1 = s(x)$, à partir de quoi on peut renoncer à la notation s.

On a en outre la propriété $x + z = y + z \Longrightarrow x = y$. Elle est évidente pour $z = 0$ et, pour $z = 1$, c'est l'axiome 4. Supposons-la valable quels que soient x et y pour $z = n$. L'égalité $x + (n + 1) = y + (n + 1)$ s'écrit aussi $(x + 1) + n = (y + 1) + n$ et l'hypothèse de récurrence entraîne $x + 1 = y + 1$, donc $x = y$.

▪ *L'ordre naturel* dans $\mathbb{N}$ en découle : $x \leq y$ signifie qu'il existe z dans $\mathbb{N}$ tel que $y = x + z$. C'est bien un ordre :

· $x \leq x$ résulte de $x + 0 = x$;

· si $x \leq y$ et $y \leq z$, il existe u et v tels que $y = x + u$ et $z = y + v$, donc $z = x + (u + v)$, donc $x \leq z$;

· si $x \leq y$ et $y \leq x$, il existe t et u tels que $y = x + t$ et $x = y + u$, donc que $x = x + (t + u)$, ce qui implique $t + u = 0$; si par exemple on avait $t \neq 0$, t serait un successeur, $t = w + 1$ et l'on aurait $(u + w) + 1 = 0$, ce qui ferait de 0 un successeur, contrairement à l'axiome 3.

▪ Cet ordre est *total*. Prenons un élément x et considérons l'ensemble E des y comparables à x, c'est-à-dire tels que $x \leq y$ ou $y \leq x$. On a $0 \leq x$, puisque $x = 0 + x$, donc $0 \in$ E.
Soit y un élément de E ; montrons que $y + 1 \in$ E. Si $x \leq y$, il existe z tel que $y = x + z$, donc $y + 1 = (x + z) + 1 = x + (z + 1)$, ce qui prouve $x \leq y + 1$; si $y < x$, on a $x = y + h$, avec $h \neq 0$; h est donc un successeur, $h = k + 1$, d'où $x = (y + 1) + k$ et donc $y + 1 \leq x$. E satisfait bien aux hypothèses du principe de récurrence : on a donc E $= \mathbb{N}$.

▪ Même travail pour la *multiplication* que pour l'addition : on pose $0 \times x = 0$, puis on définit par récurrence $n \times x$ en posant, pour tout m, $s(m) \times x = m \times x + x$. Ses propriétés se démontrent bien sûr (longuement) par récurrence.

Au terme de ce pensum, dans lequel la récurrence a été un élément moteur omniprésent, on a bien reconstitué toutes les propriétés des entiers naturels. Dedekind et Peano ont donc indiscutablement trouvé une *reconstruction* de $\mathbb{N}$ à partir d'une base minimale. Il n'est pas évident pour autant que ce soit une construction au sens mathématique du terme.

Les controverses

La construction de Dedekind avait deux points faibles :
▪ reposer sur une théorie intuitive des ensembles dont la fragilité allait être prouvée, quelque dix ans plus tard, par la mise en évidence de ses nombreux paradoxes ;
▪ avoir pour pivot l'existence d'ensembles en bijection avec une partie stricte d'eux-mêmes, « démontrée » par un exemple plus métaphysique que mathématique (Cf. le § 66 cité ci-dessus),.

La construction de Peano semble à première vue échapper à ces reproches. Hélas, il faut pour légitimer une construction axiomatique établir sa *cohérence*, c'est-à-dire *démontrer que ses axiomes sont compatibles*. On le fait d'habitude en exhibant un exemple, mais ici le seul exemple qui vienne naturellement à l'esprit est $\mathbb{N}$ lui-même, ce qui nous enferme dans un joli cercle vicieux.

Devant cette difficulté majeure, les mathématiciens se sont aussitôt divisés en deux camps : ceux qui, comme Poincaré, estimaient que le problème était par essence insoluble et ceux qui, comme Hilbert, espéraient. Et lorsqu'en 1900 ce dernier a dressé sa fameuse liste de vingt-trois problèmes à résoudre en priorité par les mathématiciens du XXe siècle, la preuve de la compatibilité des axiomes de Peano y figurait en seconde position(13).

Sur ce terrain miné(14), les meilleurs spécialistes de logique mathématique ont travaillé d'arrache-pied. Ce qu'ils nous ont appris ne vient guère à l'appui de l'optimisme de Hilbert. En 1931, Kurt Gödel a en effet établi un « théorème d'incomplétude » d'où résulte l'impossibilité de démontrer la cohérence de l'arithmétique dans le cadre défini par les axiomes de Peano. Il est vrai qu'en 1936 Gerhardt Gentzen a prouvé la cohérence en question… mais en débordant le cadre péanien pour se placer dans celui des transfinis dénombrables, dont la cohérence, j'imagine, ne doit pouvoir se prouver que dans un cadre plus vaste… De toute façon, passer par les transfinis pour s'assurer que 2 et 2 font 4 laisse le profane assez rêveur.

Conclusion

On peut donc s'étonner de la phrase qui figure dans les commentaires du programme de terminale S : « On présentera le principe de récurrence comme un axiome ». Veut-on vraiment inciter les enseignants(15) à parler des axiomes de Peano ? Aurait-on oublié comment, il y a quelque quarante ans, l'introduction dans l'enseignement secondaire d'une axiomatique de la géométrie élémentaire et d'une axiomatique des probabilités a été tuée par le ridicule après avoir fait d'innombrables victimes ?

Il me semble que, plutôt que de perturber les lycéens en les amenant à se poser des questions dont la signification même est hors de leur portée, la solution de sagesse serait de considérer les entiers naturels comme une donnée première et la récurrence comme allant de soi. Aucun élève ne songera sérieusement à contester le raisonnement que voici :

> Le théorème est vrai du nombre 1. Or s'il est vrai de 1, il est vrai de 2. Donc il est vrai de 2. Or s'il est vrai de 2, il est vrai de 3. Donc il est vrai de 3, et ainsi de suite […]

(13) Le problème numéro 1 était *l'hypothèse du continu* : peut-on trouver des ensembles plus riches que $\mathbb{N}$ et moins riches que $\mathbb{R}$?
(14) Pour se faire une idée du genre de difficultés rencontrées, lire les articles de Michèle Artigue et de Roger Cuppens sur les suites de Goodstein, respectivement dans les numéros 498 et 502 du Bulletin vert.
(15) Les méchantes langues prétendent qu'une leçon sur la construction des entiers par les axiomes de Peano figure encore au menu de l'oral du CAPES.

La formule que je viens de citer est de Poincaré, à qui je laisse le mot de la fin. Il affirme, dans le chapitre 1 de *La Science et l'Hypothèse* (1902) [9], que la récurrence est « le raisonnement mathématique par excellence » et qu'elle est irréductible à la logique classique car, dit-il, elle est « l'affirmation de la puissance de l'esprit qui se sait capable de concevoir la répétition indéfinie d'un même acte dès que cet acte est une fois possible ».

Post-scriptum

L'histoire de la récurrence ne s'arrête pas là. La récurrence usuelle, celle qui fait passer de n à $n+1$, est, comme on vient de le voir, **une propriété spécifique de $\mathbf{N}$**. Mais il existe une variante, la récurrence généralisée, qui s'énonce ainsi :

Si une partie P de N contient 0 et si, chaque fois qu'elle contient tous les éléments strictement inférieurs à x, elle contient aussi x, alors elle est égale à N.

Et cette récurrence-là s'étend à tout ensemble « bien ordonné »… ce qui mériterait un article.

Sitographie

La liste ci-dessous se limite volontairement aux textes originaux.

[1] **Euclide**, théorème sur les nombres premiers :
http://www2.mat.ulaval.ca/fileadmin/Cours/HST-2901/A10_EuclideIX.20.pdf

[2] **Euclide**, théorème sur le PGCD : aller sur le site
http://euclides.fr/bibliotheque/euclide/index.html
puis cliquer sur « Livre septième et voir les pages 2-3

[3] **Archimède**, *De la mesure du cercle* : sur « gallica.bnf.fr », taper le titre *Œuvres d'Archimède* et aller à la page 116.

[4] **Pascal** : *Traité du triangle arithmétique*. Sur le site « gallica.bnf.fr ».

[5] **Fermat** : Sur « gallica.bnf.fr », pages 431-432 du tome 2 des *Œuvres de Fermat* publiées en 1894.

[6] **Dedekind** : L'article sur la construction des réels et celui sur l'axiomatisation de N sont réunis en traduction anglaise sous le titre *Essays On The Theory Of Numbers*, téléchargeable gratuitement sur : http://www.gutenberg.org/ebooks/21016.

[7] **Cantor** : http://bibnum.education.fr/mathematiques/theorie-des-nombres/cantor-et-les-infinis. Texte court et très accessible (pour peu que l'on saute les détails techniques).

[8] **Peano** : taper sur un moteur de recherche « Arithmetices principia ». Ce n'est malheureusement pas traduit… et ni le latin ni le péanien ne sont aisés à déchiffrer.

[9] **Poincaré** : *La Science et l'Hypothèse* peut être consulté sur le site « gallica.bnf.fr ». Lecture facile, agréable et pleine d'enseignements. Existe en collection de poche.