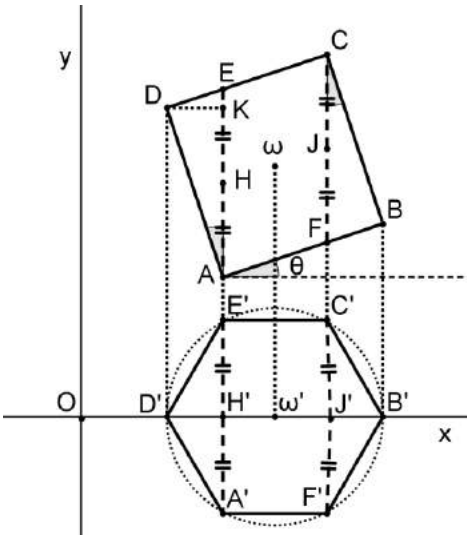
Un exercice de symétrisation

Les notations étant celles de la figure, on veut que l'image $A'F'B'C'E'D'$ du rectangle $ABCD$ par la symétrisation de Steiner soit un hexagone régulier. On pose $AB = a$, $AD = b$; θ est l'angle aigu de (AB) avec Ox. Que dire de a, b, θ ?

On a $H'B' = AB\ cos\theta$, donc $\qquad H'B' = a\ cos\theta \qquad (1)$

de $D'H' = DK$ on tire $\qquad D'H' = b\ sin\theta \qquad (2)$

de $A'E' = AE$ on tire $\qquad A'E' = \frac{b}{cos\theta} \qquad (3)$



Conditions nécessaires :

Supposons maintenant que $A'F'B'C'E'D'$ soit régulier. Si R désigne le rayon de son cercle circonscrit, les trois égalités ci-dessus donnent respectivement :

$\frac{3R}{2} = a\ cos\theta$ (1') ; $\frac{R}{2} = b\ sin\theta$ (2') ; $R\sqrt{3} = \frac{b}{cos\theta}$ (3').

Des relations (1') et (2') on tire $a = 3b\ tan\theta$; des relations (2') et (3') on tire $sin\theta\ cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}}$, donc $sin2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il n'est pas restrictif de supposer $0 \leq \theta \leq 45°$, car si l'on a $45° \leq \theta \leq 90°$, il suffit d'effectuer une symétrie par rapport à Oy et d'échanger les notations B et D pour être ramené au cas précédent. On a donc $0 \leq 2\theta \leq 90°$, ce qui fait que $sin2\theta$ détermine complètement θ ($\theta \approx 17{,}63°$).

Calculons $tan\theta$:

$cos2\theta = \sqrt{1 - sin^2 2\theta} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, d'où $tan\theta = \frac{sin2\theta}{1+cos2\theta} = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}$ et $\frac{a}{b} = \frac{3}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \approx 0{,}9535$.

Finalement, on a les conditions nécessaires : $\boxed{\begin{matrix} tan\theta = \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} \\ \frac{a}{b} = 3\ tan\theta \end{matrix}}$.

Réciproque :

Supposons que le rectangle satisfasse ces conditions. De $H'B' = a\ cos\theta$, $D'H' = b\ sin\theta$ et $\frac{a}{b} = 3\ tan\theta$, on déduit $H'B' = 3D'H'$ et donc $D'B' = 4D'H'$. Le rectangle étant symétrique par rapport à son centre, l'hexagone a un centre de symétrie ω', milieu de $D'B'$.

On a donc $D'H' = H'\omega' = \omega'J' = J'B'$. Appelons $\frac{R}{2}$ la longueur commune de ces quatre segments. Pour prouver que l'hexagone est régulier et inscrit dans le cercle de centre ω' et de rayon R, il suffit, compte tenu des symétries, de prouver que $\omega'E' = R$. Dans le triangle rectangle $\omega'H'E'$, on a :

$\omega' E'^2 = H'\omega'^2 + H'E'^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{1}{4}A'E'^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{b^2}{4\,cos^2\theta}$ et, comme $R = 2D'H' = 2b\ sin\theta$, il s'ensuit : $\omega' E'^2 = \frac{R^2}{4} + \frac{R^2}{16 sin^2\theta\ cos^2\theta}$, ce qui, puisque $sin2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$, donne $\omega' E'^2 = \frac{R^2}{4} \times (1+3)$. On a bien $\omega' E' = R$, ce qui termine le raisonnement.