Solution des épreuves du gaokao 2012

Solutions rédigées par Catherine Combelles, Anne Crouzier et Pierre Legrand

Première épreuve (QCM)

1. $\frac{-1+3i}{1+i} =$:

(A) $2+i$ (B) $2-i$ (C) $1+2i$ (D) $1-2i$

$\frac{-1+3i}{1+i} = \frac{(-1+3i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = (-1+3i+i+3)/2 = 1+2i$

2. On considère les ensembles $A = \{1, 3, \sqrt{m}\}$, $B = \{1, m\}$ avec $A \cup B = A$.

Alors m est égal à :

(A) 0 ou $\sqrt{3}$ (B) 0 ou 1 (C) 1 ou $\sqrt{3}$ (D) 1 ou 3.

$A \cup B = A$ signifie $B \subset A$, ce qui est réalisé si et seulement si $m \in A$, soit $m = 0$, 1 ou 3.

L'énoncé est donc incorrect.

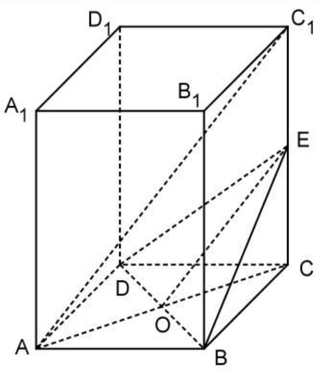
3. Soit une ellipse d'axes Ox et Oy. La distance des deux foyers est 4 et une des directrices a pour équation $x = -4$. Alors l'ellipse a pour équation :

(A) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$ (B) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$ (C) $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ (D) $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{4} = 1$

Si $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est l'équation de l'ellipse, la distance des foyers est $2c$, où $c^2 = a^2 - b^2$; on a donc $a^2 - b^2 = 4$. De plus la distance d'un foyer à la directrice associée est $d = \frac{b^2}{c}$; ici on a $d = 2$ et, comme $c = 2$, il vient $b = 2$, puis $a = 2\sqrt{2}$, d'où l'équation $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$.

4. Soit le prisme droit à base carrée $ABCDA_1B_1C_1D_1$, avec $AB = 2$ et $CC_1 = 2\sqrt{2}$. E est le milieu de $[CC_1]$. La distance de la droite (AC_1) au plan BED est égale à :

(A) 2 (B) $\sqrt{3}$ (C) $\sqrt{2}$ (D) 1



Soit O le centre du carré de base ; le segment $[OE]$ joint les milieux de $[AC]$ et $[CC_1]$, donc il est parallèle à $[AC_1]$; ainsi la droite (AC_1) est parallèle à une droite du plan BED, donc parallèle au plan. La figure étant symétrique par rapport au plan ACC_1A_1, la distance d cherchée est celle des deux droites (AC_1) et (OE). Le triangle ACC_1 est rectangle isocèle et (OE) joint les milieux des côtés de l'angle droit ; d est donc la demi-hauteur du triangle, donc le quart de son hypoténuse, qui est de longueur 4. Finalement $d = 1$.

5. Soit la suite arithmétique (a_n) et S_n la somme des n premiers termes consécutifs. On a $a_5 = 5$ et $S_5 = 15$ [*la suite part de l'indice 1, ce que l'énoncé n'indique pas*]. Alors la somme des 100 premiers termes consécutifs de la suite $\left(\frac{1}{a_n a_{n+1}}\right)$ est égale à :

(A) $\frac{100}{101}$ (B) $\frac{99}{101}$ (C) $\frac{99}{100}$ (D) $\frac{101}{100}$

Si r est la raison de la suite, on a :

$a_5 = a_1 + 4r$ et $S_5 = a_1 + (a_1 + r) + (a_1 + 2r) + (a_1 + 3r) + (a_1 + 4r) = 5a_1 + 10r$.

Donc $a_1 + 4r = 5$ et $5a_1 + 10r = 15$, ce qui donne $a_1 = 1$ et $r = 1$, d'où $a_n = n$ pour tout n.

Ainsi $\frac{1}{a_n a_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

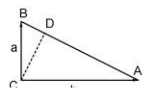
D'où $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ \ldots + \left(\frac{1}{100} - \frac{1}{101}\right) = 1 - \frac{1}{101} = \frac{100}{101}$.

6. Dans le triangle ABC, $[CD]$ est la hauteur relative à $[AB]$. On a $\overrightarrow{CB} = a$, $\overrightarrow{CA} = b$ avec $a.b = 0$, $\|a\| = 1$, $\|b\| = 2$.

Alors $\overrightarrow{AD} =$:

(A) $\frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b$ (B) $\frac{2}{3}a - \frac{2}{3}b$ (C) $\frac{3}{5}a - \frac{3}{5}b$ (D) $\frac{4}{5}a - \frac{4}{5}b$

On a $\overrightarrow{AB} = a - b$; si on pose $\overrightarrow{AD} = \mu\overrightarrow{AB} = \mu(a - b)$, il vient $\overrightarrow{CD} = b + \mu(a - b)$. On veut $\overrightarrow{CD}.\overrightarrow{AB} = 0$, c'est-à-dire $(b + \mu(a - b)).(a - b) = 0$. Compte tenu de $a.b = 0$, cela donne $(-1 + \mu)b^2 + \mu a^2 = 0$. Comme $a^2 = 1$ et $b^2 = 4$, on a $5\mu = 4$. Donc $\overrightarrow{AD} = \frac{4}{5}(a - b)$.



7. α est un angle du second quadrant tel que $sin\alpha + cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Alors $cos2\alpha$ = :

(A) $-\frac{\sqrt{5}}{3}$ (B) $-\frac{\sqrt{5}}{9}$ (C) $\frac{\sqrt{5}}{9}$ (D) $\frac{\sqrt{5}}{3}$

De $sin\alpha + cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$ on tire par élévation au carré $sin^2\alpha + cos^2\alpha + 2sin\alpha\, cos\alpha = \frac{1}{3}$, d'où $sin2\alpha = -\frac{2}{3}$, puis $cos^2 2\alpha = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$ et $cos2\alpha = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}$. Mais $cos2\alpha = cos^2\alpha - sin^2\alpha$, d'où $cos2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}(cos\alpha - sin\alpha)$. Or l'angle α étant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et π, on a $cos\alpha < 0$ et $sin\alpha > 0$; finalement $cos2\alpha < 0$ et donc $cos2\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$.

8. F_1 et F_2 sont les foyers de l'hyperbole C d'équation $x^2 - y^2 = 2$. P est un point de C tel que $PF_1 = 2PF_2$.

Alors $cos\widehat{F_1PF_2} =$:

(A) $\frac{1}{4}$ (B) $\frac{3}{5}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) $\frac{4}{5}$

La distance des foyers d'une hyperbole équilatère $x^2 - y^2 = a^2$ est $2a\sqrt{2}$. Ici $a = \sqrt{2}$, donc $F_1F_2 = 4$. On a l'égalité $(F_1F_2)^2 = (PF_1)^2 + (PF_2)^2 - 2\, PF_1 \times PF_2 \cos\theta$, où θ désigne l'angle $\widehat{F_1PF_2}$. Posons $PF_2 = u$; on a alors $PF_1 = 2u$ et donc $16 = 5u^2 - 4u^2\, cos\theta = u^2(5 - 4cos\theta)$. D'après la définition bifocale de l'hyperbole, on a aussi $PF_1 - PF_2 = 2a = 2\sqrt{2}$, soit $u = 2\sqrt{2}$.

Donc $5 - 4\,cos\theta = 2$, c'est-à-dire $cos\theta = \frac{3}{4}$.

9. Sachant que $x = ln\,\pi$, $y = log_5 2$ et $z = e^{-\frac{1}{2}}$, alors :

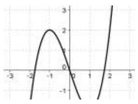
(A) $x < y < z$ (B) $z < x < y$ (C) $z < y < x$ (D) $y < z < x$

Avec la calculette : $x = ln\,\pi \approx 1{,}14$ $y = log_5 2 \approx 0{,}43$ et $z = e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}60$.

Sans calculette : $\pi > e$ donc $ln\,\pi > 1$; $log_5 2 = \frac{ln2}{ln5}$ et, comme $\frac{ln2}{ln4} = \frac{1}{2}$, $log_5 2 < \frac{1}{2}$; de l'inégalité $e < 3$ on tire $z = \frac{1}{\sqrt{e}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{2}$ et l'on a évidemment $z < 1$. D'où $y < z < x$.

10. La représentation graphique de la fonction $y = x^3 - 3x + c$ a deux points communs avec l'axe des x. Alors c est égal à :

(A) -2 ou 2 (B) -9 ou 3 (C) -1 ou 1 (D) -3 ou 1



La représentation graphique (ou si l'on préfère le tableau de variation, immédiatement déduit du calcul de la dérivée) montre aussitôt qu'il n'existe que deux valeurs prises exactement deux fois par la fonction $f(x) = x^3 - 3x$, à savoir les valeurs 2 et -2 . Seules, donc, les fonctions

$x^3 - 3x + 2$ et $x^3 - 3x - 2$ ont exactement deux zéros.

11. Disposer les lettres a, a, b, b, c, c en 3 lignes et 2 colonnes, de sorte qu'aucune ligne ni aucune colonne ne comporte deux lettres identiques. Quel est le nombre de combinaisons possibles ?

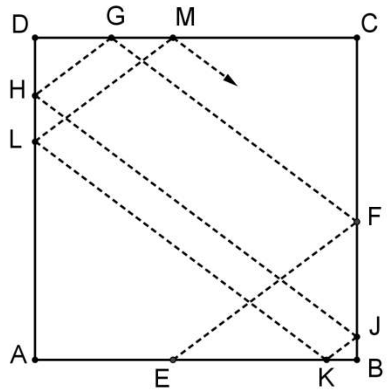
(A) 12 (B) 18 (C) 24 (D) 36

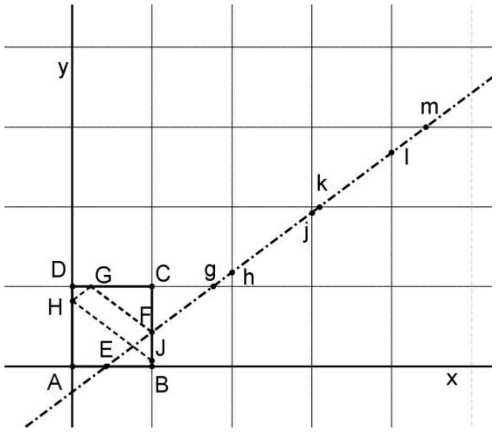
Pour n'avoir pas de répétition dans les colonnes, il faut et il suffit que l'on ait dans chacune a, b, c . Il y a 6 façons (les 6 permutations des 3 lettres) de remplir la première colonne. À chacune correspondent deux secondes colonnes : ainsi à $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ correspondent $\begin{pmatrix} b \\ c \\ a \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} c \\ a \\ b \end{pmatrix}$. Au total 12 dispositions.

12. On donne un carré $ABCD$ tel que $AB = 1$. On place sur $[AB]$ un point E et sur $[BC]$ un point F tels que $AE = BF = \frac{3}{7}$.

Un point mobile P part en ligne droite de E vers F et rebondit chaque fois qu'il rencontre un côté du triangle, l'angle de réflexion étant égal à l'angle d'incidence. Quel est le nombre d'impacts effectués par le point P lorsqu'il revient pour la première fois en E ?

(A) 16 (B) 14 (C) 12 (D) 10





C'est un cas particulier du billard rectangulaire, problème fameux mais pas facile à résoudre en toute rigueur. Heureusement, ici, on ne demandait pas au candidat de prouver, mais de deviner correctement.

Solution bovine, mais rigoureuse : Les segments du trajet ont alternativement la pente $\frac{3}{4}$ et $-\frac{3}{4}$. Un calcul laborieux (non reproduit) montre qu'au septième impact on arrive au point M de $[DC]$ tel que $DM = \frac{3}{7}$. Les conditions sont alors exactement symétriques par rapport à la médiane horizontale du carré $ABCD$ de celles qu'on avait au départ. Le retour en M se fera donc au septième impact à partir de M, donc au quatorzième en tout.

Esquisse de solution non bovine : On « déplie » la trajectoire le long de la droite Δ qui porte son premier segment $[EF]$ et dont l'équation dans le repère Axy est $21x - 28y = 9$. Les points d'impact successifs G, H, J, K, L, M viennent aux intersections successives g, h, j, k, l, m de Δ avec les droites d'abscisse ou d'ordonnée entière[1]. Revenir en E implique que la droite Δ ait un point d'ordonnée y entière et d'abscisse x telle que $x + \frac{3\varepsilon}{7}$ $(\varepsilon = \pm 1)$ soit entier. Or $x + \frac{3\varepsilon}{7} = \frac{28y+9+9\epsilon}{21}$. Une condition nécessaire est donc que y soit multiple de 3 ; une autre est que 7 divise $9(1+\varepsilon)$, donc que $\varepsilon = -1$.

Mais quand on franchit une droite $y = n$, elle correspond à un choc sur $[AB]$ si n est pair, sur $[CD]$ si n est impair. Il nous faut donc essayer un multiple pair de 3. Commençons par $y = 6$, qui donne $x = 8 + \frac{3}{7}$. Pour aller sur Δ de E au point $(8 + \frac{3}{7}, 6)$, on franchit les droites d'abscisse 1, 2, 3, 4,…8 et les droites d'ordonnée 1, 2,…5 pour aboutir à la droite d'ordonnée 6. Le point obtenu est donc le 14^{e} impact. C'est le bon : il est sur $[AB]$ à l'abscisse $\frac{3}{7}$.

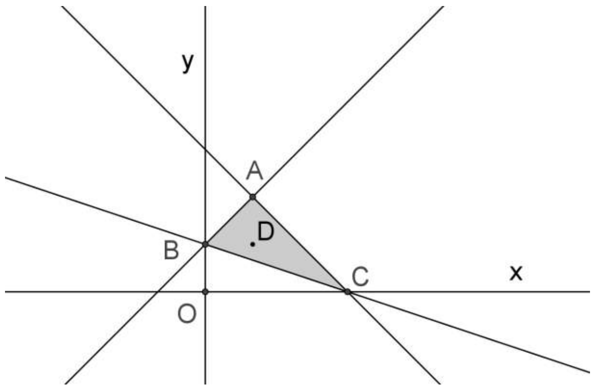
[1] Cette affirmation est un peu légère, mais une démonstration en forme dans un cadre élémentaire serait franchement pénible.

Seconde épreuve

13. x et y vérifient les conditions suivantes :

$$\begin{cases} x-y+1 \geq 0 \\ x+y-3 \leq 0 \\ x+3y-3 \geq 0 \end{cases}$$

Quelle est la plus petite valeur de $z = 3x - y$?



Les trois droites déterminent un triangle ABC, avec $A(1,2)$, $B(0,1)$, $C(3,0)$. Les trois inégalités définissent le triangle ombré : il suffit pour le prouver de voir que le point $D(1,1)$, qui est intérieur au triangle, les vérifie.

Le minimum de $z = 3x - y$ sur le triangle correspond au maximum de $y - 3x$. En déplaçant une droite $y - 3x = h$, on voit aussitôt que ce dernier est atteint en B.

Le minimum cherché est donc -1, atteint en $B(0,1)$.

14. La fonction $y = sinx - \sqrt{3}\, cosx$, où $(0 \leq x \leq 2\pi)$ est maximale pour x = ...

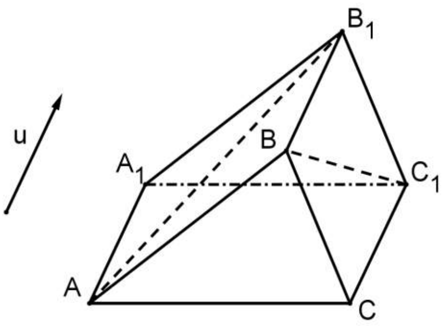
[*réponse* : $\frac{5\pi}{6}$]

$y = sinx - \sqrt{3}\, cosx = 2\left(\frac{1}{2}\, sinx - \frac{\sqrt{3}}{2} cosx\right) = 2\left(sinx\, cos\frac{\pi}{3} - cosx\, sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\, sin(x - \frac{\pi}{3})$. Cette expression est maximum pour $\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$, donc $x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2}$, soit $x = \frac{5\pi}{6}$.

15. Quel est le coefficient de $\frac{1}{x^2}$ dans le développement de $\left(x + \frac{1}{x}\right)^n$ quand le coefficient du troisième terme est le même que celui du septième terme dans la formule du binôme ?

On a $\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$ si et seulement si $p = q$. Ici on veut avoir $\binom{n}{2} = \binom{n}{6}$, ce qui donne $n = 8$. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^8 = x^8 + \binom{8}{1} x^6 + \binom{8}{2} x^4 + \binom{8}{3} x^2 + \cdots + \frac{1}{x^8}$. Par symétrie le coefficient de $\frac{1}{x^2}$ est aussi celui de x^2, soit $\binom{8}{3} = \frac{8.7.6}{1.2.3} = 56$.

16. Dans le prisme $ABCA_1B_1C_1$ [*il est de base ABC, mais ce n'est pas dit*], toutes les arêtes sont de même longueur. De plus $\widehat{BAA_1}$ et $\widehat{CAA_1}$ valent 60°. Quel est le cosinus de l'angle formé par les droites (AB_1) et (BC_1) ?



À une homothétie près, on peut toujours supposer que la longueur commune des arêtes est 1. ABB_1A_1 et ACC_1A_1 sont deux losanges de côté 1 dont l'angle en A vaut 60° ; les triangles ABA_1 et ACA_1 sont donc équilatéraux (ce dont il résulte aussitôt que $AB_1 = \sqrt{3}$) et l'on a $A_1B = A_1C = 1$. A et A_1 étant équidistants de B et C sont dans le plan médiateur de $[BC]$, ce qui assure que $\overrightarrow{BC}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AA_1} = \overrightarrow{BB_1} = \overrightarrow{CC_1}$. Ainsi BCC_1B_1 est un carré, donc $BC_1 = \sqrt{2}$.

$\overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{BC_1} = (\overrightarrow{AB} + \vec{u}).(\overrightarrow{BC} + \vec{u}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AC}.\vec{u} + 1$. Le triangle ABC étant équilatéral, on a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{BC} = -\cos(60°) = -\frac{1}{2}$; $\overrightarrow{AC}.\vec{u} = \overrightarrow{AC}.\overrightarrow{AA_1} = \cos(60°) = \frac{1}{2}$, ce qui donne $\overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{BC_1} = 1$. Or, si on appelle φ l'angle cherché, $\overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{BC_1} = AB_1 \times BC_1 \times cos\varphi = \sqrt{6}\, cos\varphi$.

Finalement $cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{6}}$.

17. Soit un triangle ABC de côtés a, b et c. Sachant que $cos(\hat{A} - \hat{C}) + cos\hat{B} = 1$ et $a = 2c$, calculer $\hat{C}$.

Sachant que $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = \pi$, on tire de $cos(\hat{A} - \hat{C}) + cos\hat{B} = 1$ la relation

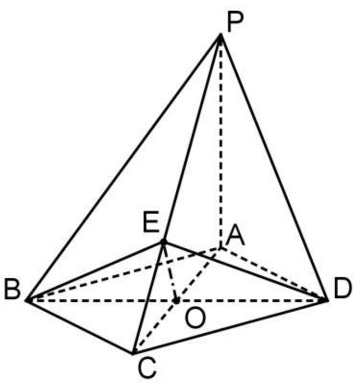
$$cos(\hat{A} - \hat{C}) - \cos(\hat{A} + \hat{C}) = 1$$

soit encore $2sin\widehat{A}\, sin\widehat{C} = 1$. Mais $\frac{a}{sin\hat{A}} = \frac{c}{sin\hat{C}}$ et $a = 2c$, donc $sin\widehat{A} = 2\, sin\widehat{C}$. On a donc $sin^2\widehat{A} = 1$, soit $sin\widehat{A} = 1$, ce qui prouve au passage que le triangle est rectangle en A. De plus $sin\widehat{C} = \frac{1}{2}$, donc $\hat{C} = \frac{\pi}{6}$.

18. La base $ABCD$ est un losange et la droite (PA) est perpendiculaire au plan $ABCD$; on a de plus $AC = 2\sqrt{2}$, $PA = 2$. Soit E un point sur PC tel que $PE = 2EC$.

a) Démontrer que (PC) est perpendiculaire au plan BED.

b) Si l'angle des deux plans APB et PBC est 90°, quelle est la valeur de l'angle formé par (PD) et le plan PBC ? [*N.B. : la figure était donnée, sans le segment [OE]*]



a) Soit O le centre du losange. Compte tenu de la symétrie de la figure par rapport au plan PAC, il suffit de prouver que $\widehat{CEO}$ est droit, donc que les triangles CAP et CEO sont semblables et donc que $\frac{CE}{CO} = \frac{CA}{CP}$, autrement dit $CE \times CP = CA \times CO$.

Or $CP^2 = AP^2 + AC^2 = 4 + 8 = 12$, donc $CE = \frac{1}{3}CP = \frac{2}{\sqrt{3}}$. On en déduit $CE \times CP = \frac{2}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3} = 4$; mais $CA \times CO = 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 4$, ce qui règle la question.

b) Le plan APB est orthogonal au plan ABC ; s'il est aussi orthogonal au plan PBC, il est orthogonal à leur intersection (BC) ; l'angle $\widehat{CBA}$ est donc droit et $ABCD$ est un carré (de côté 2 puisque sa diagonale AC vaut $2\sqrt{2)}$. Le triangle ABP est donc rectangle isocèle ; il en résulte que, si I désigne le milieu du segment $[BP]$, la droite

(AI) est perpendiculaire à (BP). Mais (BC) est orthogonale au plan APB, donc en particulier à (AI). Ainsi (AI), étant orthogonale à la fois à (BP) et (BC), est perpendiculaire au plan (PBC).

L'angle que nous cherchons est donc le complémentaire de l'angle des vecteurs $\overrightarrow{PD}$ et $\overrightarrow{AI}$

Or : $\overrightarrow{DP}.\overrightarrow{AI} = (\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AP}).\frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{DA}.\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{AB}) = \frac{1}{2}AP^2 = 2$

En outre, $DP = 2\sqrt{2}$ et $AI = \sqrt{2}$. Ainsi, $cos(\overrightarrow{DP}, \overrightarrow{AI}) = \frac{\overrightarrow{DP}.\overrightarrow{AI}}{\|DP\| \times \|\overrightarrow{AI}\|} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

L'angle de (DP) avec la normale au plan (PBC) est de $\frac{\pi}{3}$, et donc l'angle formé par (PD) et le plan PBC vaut $\frac{\pi}{6}$.

19. Selon le règlement d'un match de ping-pong, chacun des deux joueurs assure à tour de rôle le service 2 fois de suite. À chaque service, le vainqueur gagne 1 point et le perdant 0 point.

Si la probabilité pour un joueur de gagner le point quand il a le service est 0,6 et que le joueur A sert le premier :

a) Quelle est la probabilité qu'au quatrième service, le score de A contre B soit de 1 contre 2 ?

b) Quelle est la probabilité que le point soit obtenu par B au quatrième service ?

A assure donc les services 1 et 2, B les services 3 et 4.

a) A gagne une fois et perd deux fois si la liste des gagnants est ABB, BAB ou BBA. Or

$$\begin{cases} p(ABB) = 0{,}6 \times 0{,}4 \times 0{,}6 = 0{,}144 \\ p(BAB) = 0{,}4 \times 0{,}6 \times 0{,}6 = 0{,}144\ ; \\ p(BBA) = 0{,}4 \times 0{,}4 \times 0{,}4 = 0{,}064 \end{cases}$$

La probabilité cherchée est $0{,}144 + 0{,}144 + 0{,}064 = 0{,}352$.

b) C'est B qui sert au quatrième service ; sa probabilité d'avoir le point est 0,6.

20. Soit $f(x) = ax + cos\, x$, où $x \in [0; \pi]$.

a) Discuter la monotonie de la fonction f.

b) Quel est l'ensemble des valeurs de a telles que l'on ait constamment $f(x) \leq 1 + sin\, x$?

a) On a $f'(x) = a - sinx$, où $x \in [0; \pi]$. L'ensemble des valeurs prises par $f'(x)$ est donc $[a - 1, a]$. Ainsi f est monotone croissante ssi $a \geq 1$, monotone décroissante ssi $a \leq 0$.

b) Comme $f(0) = 1$, on voit que si $a \leq 0$ la fonction décroissante f ne prend que des valeurs inférieures à 1 au sens large, et *a fortiori* à $1 + sin\, x$.

Posons $g(x) = f(x) - (1 + sinx) = ax + cosx - 1 - sinx$. On veut que $g(x)$ soit constamment négatif au sens large ; or $g(\pi) = a\pi - 2$. Il nous faut donc $a \leq \frac{2}{\pi}$.

Reste le cas $0 < a \leq \frac{2}{\pi}$. On a $g'(x) = a - sinx - cosx$ et $g''(x) = sinx - cosx = \sqrt{2}\sin(x - \frac{\pi}{4})$.

x	0		$\pi/4$		ω		π
$g''(x)$	-1	$-$	0	$+$		$+$	
$g'(x)$	$a-1$	↘	$a-\sqrt{2}$	↗	0	↗	$a+1$
$g'(x)$		$-$		$-$		$+$	
$g(x)$	0	↘		↘		↗	$a\pi - 2$

Du signe de g'' on déduit qu'il existe $\omega \in \left]\frac{\pi}{4}, \pi\right[$ tel que $g'(x) < 0$ pour $x < \omega$ et $g'(x) > 0$ pour $x < \omega$; on en tire le sens de variation de g, qui prouve que sa plus grande valeur est $max(g(0), g(\pi))$, donc 0.

L'ensemble des a tels quel g soit constamment ≤ 0 est donc $\left]-\infty, \frac{2}{\pi}\right]$.

21. Sachant que la parabole C d'équation $y = (x+1)^2$ a un point commun A avec le cercle d'équation $(x-1)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = r^2$ $(r > 0)$ et que les deux courbes ont une tangente commune l au point A

a) Alors r = ……. ?

b) Si m et n sont les deux autres tangentes communes au cercle et à la parabole et D leur point d'intersection, quelle est la distance entre D et l ?

a) Appelons ω le point $\left(1, \frac{1}{2}\right)$, centre du cercle cherché. Dire que ce cercle est tangent à C au point A d'abscisse t revient à dire que la tangente en A à C, de vecteur directeur $\vec{v}$ $\left(1, 2(t+1)\right)$, est orthogonale au vecteur $\overrightarrow{\omega A}$ $\left(t-1,\ (t+1)^2 - \frac{1}{2}\right)$. On veut donc :

$$\overrightarrow{\omega A}.\vec{v} = t - 1 + 2(t+1)^3 - t - 1 = 2t^3 + 6t^2 + 6t = 0 .$$

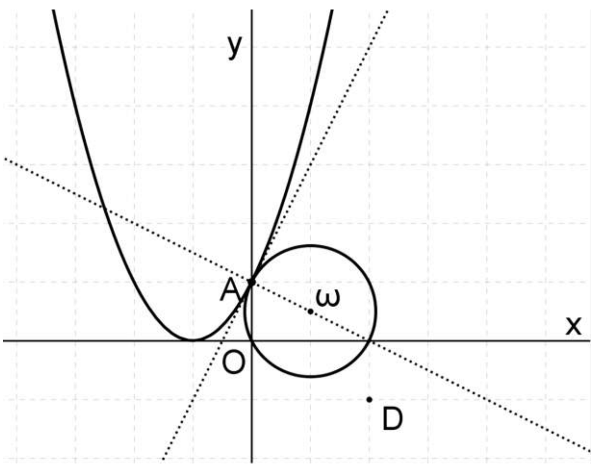
Cette équation a 0 pour seule racine réelle. Le point A cherché est donc $(0,1)$. Le rayon r est la distance ωA, soit $\frac{\sqrt{5}}{2}$.

b) La tangente à C au point d'abscisse t a pour équation $y - (t+1)^2 = 2(t+1)(x-t)$, soit encore

$2(t+1)x - y - t^2 + 1 = 0$. La distance d'un point (x, y) à cette droite est $\frac{|2(t+1)x - y - t^2 + 1|}{\sqrt{4(t+1)^2 + 1}}$. Pour le point ω, le numérateur devient $\left|2(t+1) - \frac{1}{2} - t^2 + 1\right|$, soit $\left|-t^2 + 2t + \frac{5}{2}\right|$. Reste à écrire que cette distance est $\frac{\sqrt{5}}{2}$: $\left(-t^2 + 2t + \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}\left(4(t+1)^2 + 1\right)$. Développons :

$$t^4 + 4t^2 + \frac{25}{4} - 4t^3 - 5t^2 + 10t = 5t^2 + 10t + \frac{25}{4}$$

qui devient après réduction $t^4 - 4t^3 - 6t^2 = 0$. En écartant la solution $t = 0$, qui correspond à la tangente en A, on trouve $t^2 - 4t - 6 = 0$, soit $t = 2 \pm \sqrt{10}$. D'où les deux droites d'équation :



$2\left(3 \pm \sqrt{10}\right)x - y - \left(2 \pm \sqrt{10}\right)^2 + 1 = 0,$ soit encore $2\left(3 \pm \sqrt{10}\right)x - y - 13 \mp 4\sqrt{10} = 0$. Le point d'intersection est donné par le système :

$$\begin{cases} 6x - y - 13 = 0 \\ 2x - 4 = 0 \end{cases}$$

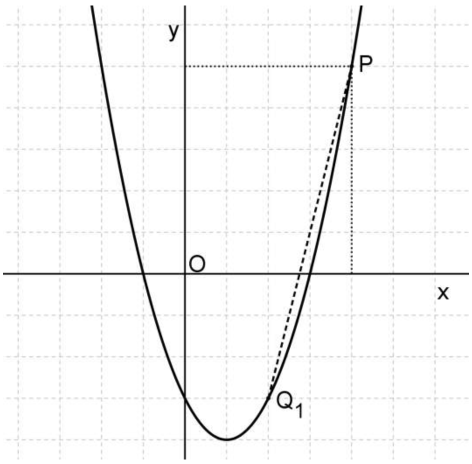
dont la solution est : $x = 2, y = -1$.

La distance du point (x, y) à la droite l est $\frac{|2x+1-y|}{\sqrt{5}}$. En y reportant les coordonnées de D, il vient la valeur $\frac{6}{\sqrt{5}}$.

22. Soit $f(x) = x^2 - 2x - 3$. Soit la suite définie par $x_1 = 2$, et x_{n+1} est l'abscisse de l'intersection de l'axe des x avec la droite (PQ_n) où P est le point de coordonnées $(4, 5)$ et Q_n le point de coordonnées $(x_n, f(x_n))$.

a) Démontrer que $2 \leq x_n \leq x_{n+1} < 3$.

b) Quelle est la formule générale donnant x_n en fonction de n ?



a) La droite (PQ_n) a pour équation $y - 5 = \frac{f(x_n)-5}{x_n-4}(x-4)$. Elle coupe l'axe des x en un point d'abscisse donnée par $x - 4 = -5\,\frac{x_n-4}{f(x_n)-5}$, soit $x = \frac{4(f(x_n)-5)-5(x_n-4)}{f(x_n)-5}$.

Mais $f(x) - 5 = x^2 - 2x - 8 = (x-4)(x+2)$, ce qui permet de simplifier par $(x_n - 4)$. Il vient

$$x_{n+1} = \frac{4x_n+3}{x_n+2} = 4 - \frac{5}{x_n+2}.$$

Quand x décrit $[2,3[$, $4 - \frac{5}{x+2}$ décrit $\left[\frac{11}{4}, 3\right[$, ce qui montre par récurrence, compte tenu de $x_1 = 2$, que pour tout $n \geq 2$,

$$\frac{11}{4} \leq x_n < 3 .$$

De plus $x_{n+1} - x_n = \frac{4x_n+3}{x_n+2} - x_n = \frac{-x_n{}^2+2x_n+3}{x_n+2} = \frac{(1+x_n)(3-x_n)}{x_n+2}$, ce qui prouve la croissance de la suite.

b) les points fixes u de la relation $x_{n+1} = \frac{4x_n+3}{x_n+2}$ vérifient $u = \frac{4u+3}{u+2}$, soit $u^2 - 2u - 3 = 0$; ce sont donc -1 et 3. On en tire $x_{n+1} - 3 = \frac{x_n-3}{x_n+2}$ et $x_{n+1} + 1 = 5\,\frac{x_n+1}{x_n+2}$, d'où $\frac{x_{n+1}-3}{x_{n+1}+1} = \frac{1}{5}\,\frac{x_n-3}{x_n+1}$.

Posons $z_n = \frac{x_n-3}{x_n+1}$; nous avons $z_1 = -\frac{1}{3}$ et $z_{n+1} = \frac{1}{5} z_n$, ce qui donne pour tout n : $z_n = -\frac{1}{3\times5^{n-1}}$.

Nous avons finalement $x_n = \frac{3+z_n}{1-z_n} = \frac{9\times5^{n-1}-1}{3\times5^{n-1}+1}$.