Faire Maths de tout bois

Henri Bareil
en collaboration avec Christiane Zehren

Le professeur de mathématiques est habitué à entraîner ses élèves dans un monde abstrait largement formalisé où l'activité de démonstration a souvent pour objectif, non de se convaincre de la vérité du résultat à démontrer, mais de décortiquer le lien précis entre la vérité de ce résultat et les autres vérités établies précédemment dans le cours de mathématiques.

Mais ce champ d'activité n'est-il pas réducteur par rapport à l'activité mathématiques dans son ensemble, terrain où s'exercent l'imagination, la conjecture, la validation, en un mot la démarche scientifique ?

C'est dans ce monde plus riche et plus ouvert qu'Henri Bareil veut nous entraîner (et nous inciter à entraîner nos élèves) à travers cet article. Dans ce monde-là, l'activité de preuve prend un autre sens. Il s'agit, non plus de relier la propriété conjecturée à ces vérités précédentes, mais de se convaincre de sa vérité même. Et dans ce monde-là, tous les moyens sont bons !

Pour nous en montrer la richesse et la variété, Henri Bareil a multiplié les exemples, faisant le choix de peu développer chacun, confiant souvent l'énoncé de la situation à une simple figure codée et laissant au lecteur le soin d'achever le raisonnement ébauché.

Vous entrerez ainsi directement dans son univers pour partager avec lui l'émerveillement que suscitent la beauté et la simplicité des situations proposées.

INTRODUCTION

Notre ambition : « faire faire » des mathématiques aux élèves, avec, pour eux comme pour nous, plaisir et intérêt, pour contribuer efficacement à une **formation scientifique**.

Huit temps forts de l'activité scientifique

En divers « moments » mettant en jeu l'esprit d'initiative, celle-ci exige prioritairement d'apprendre à :

- *poser un problème, modéliser,*
- *expérimenter, prendre des exemples,*
- *conjecturer,*
- *se documenter,*
- *bâtir une démonstration,*
- *mettre en œuvre des outils adéquats,*
- *évaluer la pertinence des résultats,*
- *les communiquer.*

Or une absence de formation réelle est, du collège aux facultés, déplorée année après année.

Force est de constater que, sauf exceptions, nos élèves fonctionnent comme des assistés : cf. par exemple les épreuves en petites marches d'escalier…

Sans doute oublie-t-on que les élèves devraient, *dans l'horaire normal*, aborder, **sans s'y rebuter**, le plus possible de « *vrais problèmes* », donc sans « micro-ascenseurs » incorporés. *Eux seuls permettent les divers « moments » de la formation scientifique.*

Il s'agit donc, en classe de mathématiques, de préparer les élèves en multipliant les outils essentiels : concepts-clés et méthodes générales de mise en œuvre.

Or les progressions scolaires présentent trois inconvénients :

- les contenus priment sur les compétences de mise en œuvre
- les changements de regard effacent souvent des méthodes antérieures
- les programmes décident des savoirs utilisables, selon une perspective très fermée.

Ces trois contraintes, je les voudrais desserrées à l'intérieur même de l'horaire normal de mathématiques.

De là, en regard de chacune, les trois contributions ci-après dénommées **A, B, C**.

⏩ Il ne sera peut-être pas toujours facile de lire en quelques minutes, *et de faire sien, puis d'exploiter et d'enrichir progressivement* un texte issu de réflexions que j'ai mûries au fil d'années d'enseignement.

⏩Mes contributions prennent des exemples à divers niveaux, de la sixième à la première : chaque lecteur voudra bien en transférer l'idée-clé au niveau où il enseigne et l'y mettre en musique compte tenu de ses élèves et de se propres goûts.

⏩ La plupart des exemples relèvent de la géométrie : elle me paraît, de la sixième à la première, *un domaine privilégié pour la mise en oeuvre des huit « moments » de la formation scientifique*.
Mais il est clair que **le but prioritaire est cette formation, et non, à ces niveaux, la géométrie elle-même**, (sauf pour quelques savoirs majeurs…)

A - QUELQUES OUTILS GÉNÉRAUX

A l'occasion de « situations-problèmes » je propose ci-après quelques « outils-méthodes ». La démonstration fournie répond à un « pourquoi ? » et son déroulement ou son résultat peuvent procurer un plaisir d'émerveillement. *Mais l'essentiel n'est pas là*. Dans un objectif d'éducation à l'activité mathématique, *il est d'abord dans la prise de conscience d'une idée-force TRANSFÉRABLE de la démonstration faite*.

Le cadre d'un article m'oblige à passer sous silence bien plus d'« outils-méthodes » que je n'en cite : notamment l'utilisation des aires pour démontrer,… la fixation provisoire de certaines variables, … Ce **A** n'a donc rien d'exhaustif !

I. Essayer et rectifier

Il peut exister, pour résoudre un problème, de belles ou « savantes » méthodes… Mais, s'il ne m'en vient pas à l'esprit, est-ce une raison pour ne rien faire ?

• **Exemple 1**. « *Une salle de cinéma compte 150 places, les unes à 7 €, les autres à 10 €. Pleine, elle assure une recette totale de 1170 €. Quel est le nombre de places de chaque sorte ?* »

Ceci se résout très bien par l'utilisation « d'inconnues ».

Mais, antérieurement à la maîtrise d'une telle méthode, un élève peut agir : il lui suffit, par exemple :
- d'essayer une « réponse », quelle qu'elle soit, par exemple 100 places à 7 € et 50 places à 10 €, auquel cas la recette totale serait de 1200 €, trop élevée de 30 €.
- de rectifier en remplaçant des places à 10 € par des places à 7 €.

Remarques :
- La méthode dite « de fausse supposition » formalise cela, un peu dogmatiquement, en supposant, au départ, toutes les places au même prix (soit 7 €, soit 10 €)
- Autre méthode : on baisse tous les prix de 7 €. La recette totale s'abaisse donc de 7 € × 150 et se réduit à 120 €, pour des places à 3 € issues des anciennes places à 10 €. D'où…

• **Exemple 2** « *Construire un triangle ABC connaissant ses médiatrices Δ_a , Δ_b , Δ_c, (concourantes en O)*»
Il existe de nombreuses méthodes de résolution (cf. pour l'une, §VI, page 8), pas « évidentes » cependant.

Si nous essayons d'abord de déterminer A, B étant son symétrique par rapport à Δ_c, et C le symétrique de B par rapport à Δ_a, je devrais retrouver A en symétrisant C par rapport à Δ_b, donc au terme de trois symétries successives d'axes concourants en O.

Un enseignant sait que la composée de telles trois symétries est une autre symétrie, d'axe Δ passant aussi par O. Dès lors il faut et il suffit que A soit pris sur Δ. (Cf. serveur APMEP).

Mais un élève qui n'a ni ce théorème, ni un autre, à sa disposition est-il pour autant empêché d'agir ?

Qu'il prenne donc A arbitrairement, et regarde ce qui se passe : A → B, B → C,

Clés de lecture :
- les démonstrations proposées ne se prétendent pas les seules possibles
- Pour des gains de place :
  - o les aires sont désignées par des parenthèses. Ainsi (ABC) signifie « aire du triangle ABC »
  - o les figures sont petites : reprenez-les en les agrandissant !
  - o leurs codages ne sont pas répétés par un texte.
- Vous trouverez, pour des compléments, quelques renvois au serveur : http://www.apmep.asso.fr

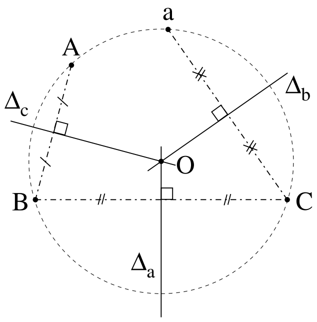


figure 1

(**) *colonne 2.*
J’utilise ici une « rotation en acte », expérimentalement définie, praticable dès l’école élémentaire, et non pas « transformation » au sens mathématique.
Point n’est besoin de théorie pour y recourir et en apprécier les effets.

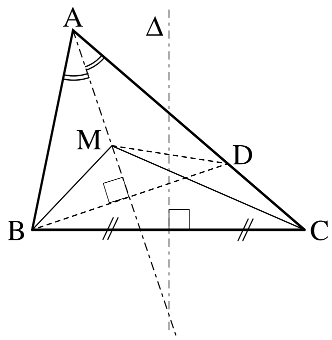


figure 3

et, en symétrisant C par rapport à Δ_b, C $\rightarrow$ a.

Nous devrions avoir a = A, ce qui, sauf miracle, n’est pas (et si miracle il y a, que se passe-t-il en bougeant A ?)

Mais alors, corrigeons !... par exemple en prenant comme nouveau point A le milieu A’ de $\widehat{Aa}$ …(ou tout autre point équidistant de A et de a). Les distances étant conservées par les trois symétries successives, l'image de A’ est :

- d'une part sur un même cercle de centre O
- d'autre part sur la médiatrice de [Aa].

Elle est donc confondue avec A’.

Remarques :

• En cherchant d’autres positions possibles de A, on peut conjecturer « l’axe-solution » Δ (démonstration cf. ci-dessus).

• Les divers triangles-solutions se correspondent dans des homothéties de centre O.

Exemple 1 : « *Construire un triangle ABC*

II. « Former » des sommes de longueurs, d'aires, …

connaissant son périmètre et deux angles $\widehat{B}$ *et* $\widehat{C}$ »

Voici, parmi d’autres, une méthode de construction **formant le périmètre en une seule longueur** [DE] cf. fig. 2.

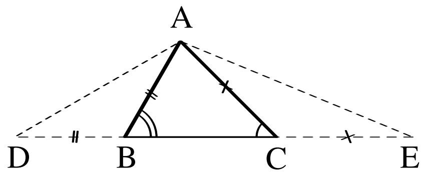


figure 2

Dès lors la construction de ABC revient d’abord à celle de ADE, avec $\widehat{D} = \widehat{B}/2, \widehat{E} = \widehat{C}/2$, puis B sur la médiatrice de [AD] et C sur celle de [AE].

Exemple 2 : *Triangle ABC, M sur la bissectrice de* $\widehat{A}$ *, avec A, B, M dans le même demi-plan de frontière Δ : cf. fig.3. Comparer MC–MB et AC–AB*

La symétrie par rapport à la bissectrice (B $\rightarrow$ D) « forme » facilement AC – AB (= DC) et redonne MB en MD.

Dès lors, dans le triangle MCD :
MC < MD + DC
Donc MC – MB < AC – AB

Remarque : Mes élèves ont souvent proposé la « facile » démonstration suivante :

MAC $\rightarrow$ MC < AM + AC
MAB $\rightarrow$ MB < AM + AB

Soustrayons membre à membre (opération 1) ces deux inégalités :

MC – MB < AC – AB.

Malheureusement, l’opération 1 revient à ajouter membre à membre deux inégalités de sens contraire (puisque c < d $\rightarrow$ – c > – d)….

Exemple 3 : *Triangle ABC avec ses angles inférieurs à 120°. Est-il possible de choisir M, intérieur au triangle, tel que d = MA + MB + MC soit minimale ?*

Essayons de « former » d. Pour cela il serait intéressant de réduire à deux les trois points de référence A, B, C… Or il existe une opération qui le permet : une rotation de 60°.

Soit, donc, fig.4, la rotation (A, 60°) qui envoie M en D et C en E.(**)

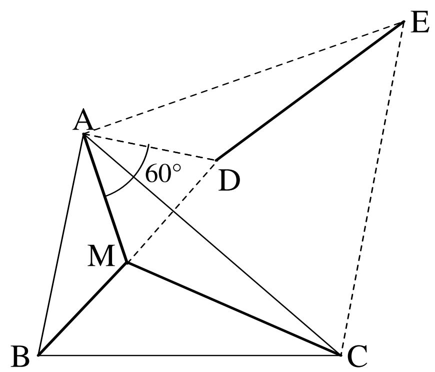


figure 4

Alors d est « formé » selon BM + MD + DE. Le minimum se produit si et seulement si M et D sont sur [BE].

Pour achever de placer M, remarquons qu’il doit également se trouver sur [CF], avec ABF équilatéral extérieur à ABC (et sur [AG], avec BCG équilatéral extérieur à ABC).

Remarque :

Comme $\widehat{AMD} = 60°$, $\widehat{AMB} = 120°$. De M on « voit » chaque côté du triangle ABC sous un angle de 120°. M est appelé « point de Fermat » ou « point de Toricelli » du triangle ABC.

Exemple 4. *Cf. figure 5 : Des mesures proposent la conjecture* $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

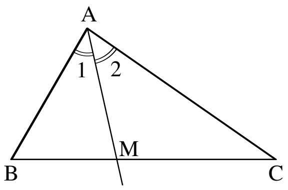


figure 5

Cela peut se démontrer par les aires (MAB) et (MAC), calculées de deux façons.

Mais on peut aussi **faire apparaître** $\frac{AC}{AB}$ **selon une même droite**. Pour cela, « reportons », par exemple, [AB] sur le prolongement, en A, de [CA], de façon que la disposition C, A, D reproduise la disposition C, M, B.

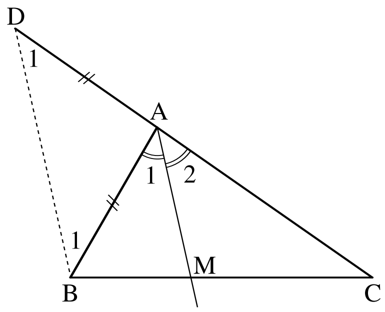


figure 6

$\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = \frac{1}{2}\ \widehat{BAC}$

Donc $\widehat{B}_1 = \widehat{D}_1 = \widehat{A}_1 = \widehat{A}_2$

d'où (AM)//(DB) et le théorème de « Thalès-triangle » utilisable.

Exemple 5 : *Cf. fig. 7. Pour quelle position de M sur [AC] l'aire du parallélogramme EMFB est-elle maximale ?*

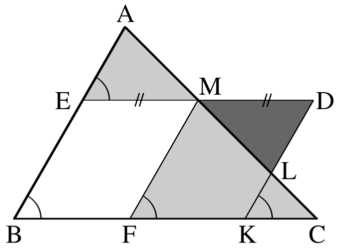


figure 7

Comparons l'aire (EMFB) à celle de (ABC) **en essayant de mettre d'un seul tenant les aires (AEM) et (MCF)**.

Pour cela symétrisons, par rapport à M, l'une des deux.

Pour la figure 7 (où MA ⩽ MC), la symétrisation permet de constater que 2 (BEMF) = (ABC) – (LKC).

Il y a maximum pour (LKC) nul donc M milieu de [AC].

Si M est, au départ, plus près de C que de A, on symétrise MCF et on retrouve les mêmes démarches et résultats.

III. Retrouver du familier

III.1 « DOUBLEMENTS » DE FIGURES

Exemple 1 : *Cf. figure 8, comparer AM à BC*

Pour cela, une progression classique d'un cours de géométrie « double » ABC :
- ou bien en rectangle BACD,
- ou bien en triangle isocèle BCE.

Les cours de géométrie offrent maints exemples analogues utilisant des « **doublements** » ou des « **divisions par 2** ». **Mais cet outil est-il bien dégagé ?**

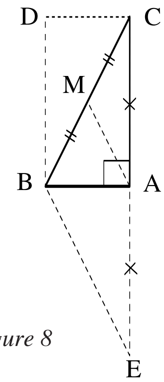


figure 8

Exemple 2. *Cf. fig.9. Triangle ABC bordé extérieurement par deux triangles rectangles, avec* $\widehat{B_1}=\widehat{C_1}$. *Comparer ME et MF.*

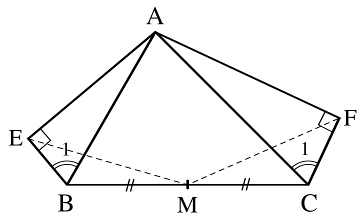


figure 9

Diverses figures, ou l'utilisation d'un logiciel de géométrie, font conjecturer l'égalité. Pourrait-on appliquer ME sur MF ? Ah… si l'on avait la figure-clé de la rotation constituée par deux triangles isocèles de même sommet principal et de même angle au sommet ! (Cf. fig. 10 : la rotation en acte de centre O, qui envoie L sur B envoie C sur N, donc [LC] sur [BN]. De là LC = BN et les droites (LC) et (BN) forment un angle égal à l'angle α de la rotation).

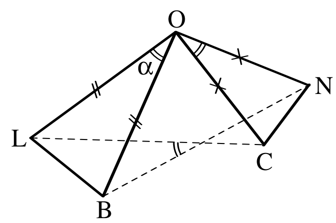


figure 10

Mais, cette figure-clé,… nous l'avons ! Il suffit de **« doubler » les triangles rec-**

tangles comme l'indique la figure 11 en pointillés…

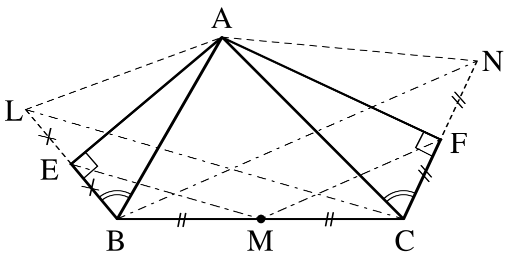


figure 11

Soit, alors la rotation $\mathfrak{R}$ (A, L→B).

C→N ; [LC]→[BN], et, avec le « théorème des milieux », ME = MF

III.2 RETROUVER DES IDENTITÉS ALGÉBRIQUES.

Exemple : « *Le produit de deux sommes de deux carrés est-il lui aussi une somme de deux carrés ?* »

Des essais font envisager un oui.
Démonstration :

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2) = a^2c^2 + a^2d^2 + b^2c^2 + b^2d^2.$$

Partageons les quatre nombres ac, ad, bc, bd, en deux paires de nombres **en essayant d'apporter des « doubles produits » permettant de retrouver des développements de carrés, mais avec des apports de somme nulle !**

Après quelques essais, le second membre s'écrira ainsi :

$$(ac + bd)^2 + (bc - ad)^2$$

ou $$(ac - bd)^2 + (bc + ad)^2$$

III.3 UN ISOMORPHISME EN ACTION

Un énoncé des Olympiades de mathématiques de Première 2002 :

« *Soient les nombres entiers de 1 à 2002. On prend au hasard deux nombres et on les remplace par leur différence (le plus grand – le plus petit). On recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'un seul nombre. Est-il pair ou impair ?* »

Un élève a eu l'idée de remplacer « **pair et impair** » par « **positif et négatif** » et « **différence** » par « **produit** ».

Comme au départ il y a 1001 nombres impairs et 1001 nombres pairs, il s'est ainsi ramené au **problème équivalent** : « Quel est le signe d'un produit de 1001 facteurs positifs et de 1001 facteurs négatifs ? », signe que l'on sait négatif. Le nombre survivant du problème est donc impair.

IV. Rendre symétrique une figure

Exemple 1 (classique). *Figure 12 où ABCD est un carré de centre O d'aire S.*

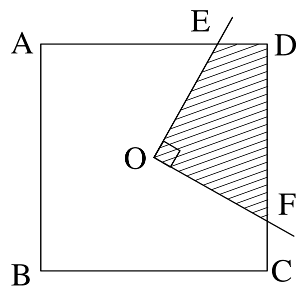


figure 12

Quelle est l'aire S' de la partie hachurée ?
Il suffit de considérer les droites (OE), (OF) et l'invariance de la figure dans une rotation (O, 90°) pour en déduire que S' = S/4.

L'exemple qui suit propose une solution simple à un problème d'Olympiades Internationales.

Exemple 2. *Deux cercles C_1 et C_2, fixes, concentriques en O ; A fixe sur C_1. Δ et Δ', orthogonales, tournant autour de A. D'où B et C mobiles, sur C_2 et C_1 respectivement. Lieu géométrique de M *?*

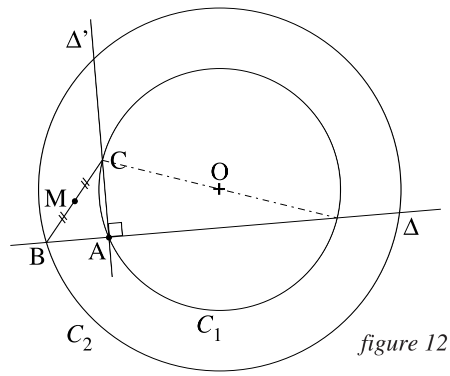
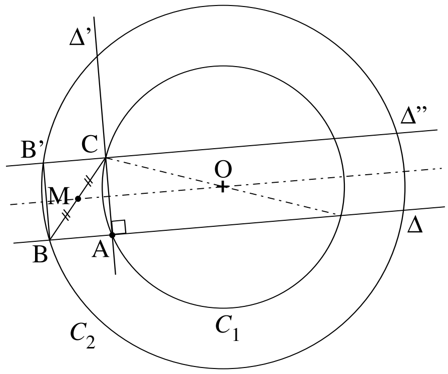


figure 12

La figure présente **un embryon de symétrie** autour de la droite MO, médiatrice de [AC].

* « *Lieu géométrique* » *a pour synonyme* « *Ensemble de points* »

Complétons la figure pour qu'elle présente une symétrie totale par rapport à (MO) :



$\Delta \to \Delta$" (qui passe par C), B → B'.
On démontre que ABB'C est un rectangle.
Donc M est aussi le milieu de [AB']
Or le lieu de B est le cercle C_2, celui de B' est aussi C_2 (symétrie) et le lieu de M est l'image de celui de B' dans l'homothétie (A ; 1/2). C'est donc le cercle centré au milieu de [OA] et de rayon OB/2.

Exemple 3 : *Sur le modèle de $3^2+4^2=5^2$, en utilisant uniquement des entiers naturels consécutifs, compléter si possible* :

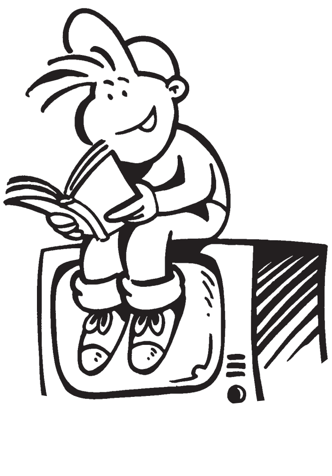
$$\square^2+\square^2+\square^2=\square^2+\square^2$$
$$\square^2+\square^2+\square^2+\square^2=\square^2+\square^2+\square^2$$

et ainsi de suite.

Une traduction littérale semble s'imposer…
Des essais réfléchis devraient faire apparaître **le bénéfice d'une symétrie autour du terme médian** pris comme inconnue n.
Ainsi, pour 5 termes, nous avons l'équation

$$(n-2)^2+(n-1)^2+n^2 = (n+1)^2+(n+2)^2$$

réductible en $n^2 = 4n + 8n$
d'où $n^2 = 12n$ et, avec $n \geqslant 2$, $n = 12$.
Avec 7 termes, nous aurons :
$n^2 = 4n + 8n + 12n$, soit $n = 24$ etc.



V. Prouver par le mouvement

Nous l'avons déjà fait bien des fois dans les pages précédentes.
Voici deux nouveaux exemples :

• **Exemple 1 :** *Encore une démonstration du théorème de Pythagore !*
ELD, symétrique de CAB par rapport à O, complète la figure classique.

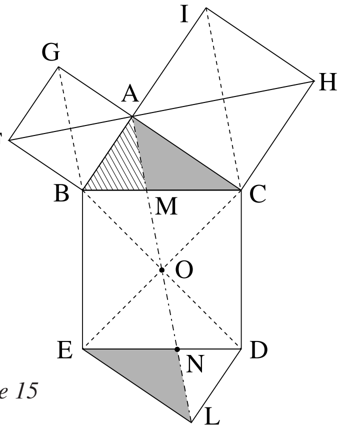


figure 15

La rotation (B, A→F) envoie [BE] sur [BC], BEL sur BCH, donc [EL] sur [CH].
De là : (ABEL) = (FBCH).
En ôtant (ABC) de chaque membre :

$$b^2/2 + c^2/2 = a^2/2$$

Exemple 2 : *Cf. figure 16. Qu'est [AI] pour [BC] ?*

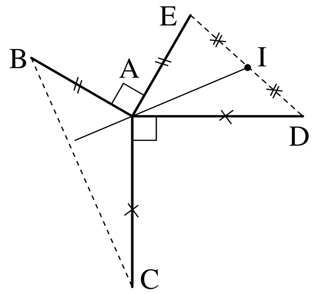


figure 16

Doublons les triangles en parallélogrammes et carrés (cf. fig. 17) **de façon à utiliser l'invariance d'un carré dans la rotation de 90° centrée au centre du carré.**

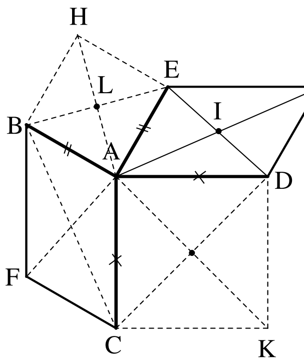


figure 17

Soit, ainsi, la « rotation en acte » (L, A → E).
Alors [BA] → [AE].
De plus : $\widehat{ABF} = \widehat{EAD}$ (même supplément $\widehat{BAC}$) et EG = AD = AC = FB.

Donc, dans la rotation, ABFC → EADG et [BC] → [AG].
Dès lors AI = BC /2 et (AI) ⊥ (BC)

VI. Des abandons provisoires

Exemple 1 : *Problème de l'exemple 2 du § I. (page 3)*

Je ne m'intéresse d'abord qu'aux droites-côtés.
Je connais leurs directions, orthogonales aux médiatrices correspondantes.
Je construis ainsi, où je veux, un triangle A'B'C' dont les médiatrices sont parallèles aux Δ_i imposées. (Fig. 18).
Soit O' leur point de concours.
Il suffit alors de la translation amenant O' sur O pour obtenir un triangle ABC solution.

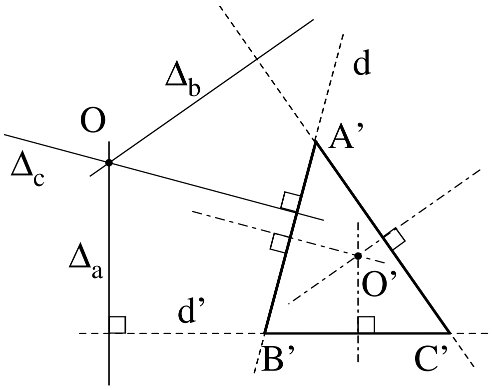


figure 18

Exemple 2. *Problème de l'exemple 1 du § II (page 4)*
J'abandonne, d'abord, la condition du périmètre.
Je construis un triangle A'B'C' tel que $\widehat{B'}=\widehat{B}$ et $\widehat{C'}=\widehat{C}$.(figure 19)

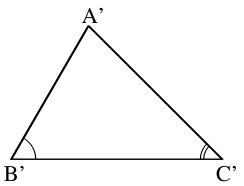


figure 19

Ce triangle A'B'C' est « à l'échelle » du triangle ABC, l'échelle étant donnée par le rapport, constructible, des périmètres.
Je forme, par exemple, le périmètre de A'B'C' selon [D'E'] et je lui adjoins, selon une autre direction (quelconque) le périmètre imposé [D'F].
En traçant par B' et C' les parallèles à (E'F) j'obtiens, sur (D'F) les trois longueurs AB, BC, AC avec le théorème de Thalès-triangle (figure 20).

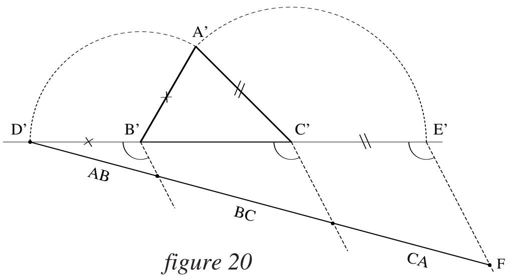


figure 20

Autres exemples : il existe de nombreux exemples utilisant l'abandon d'une contrainte, souvent récupérée ensuite par une homothétie. Vous en trouverez sur le **serveur APMEP**.

CONCLUSION, provisoire, DE CE A

J'ai, comme promis, essayé de dégager des **compétences générales de mise en œuvre** des contenus mathématiques. Objectif central à mes yeux, ces compétences s'allient à des **capacités d'observation, d'initiative et d'imagination…**

DANS LE PROCHAIN PLOT, la suite de cet article proposera les paragraphes suivants :

B DE L'ECOLE AU COLLEGE

Quels sont le sort et l'intérêt des méthodes déjà pratiquées ?

C DES OUVERTURES pour

- délinéariser et vivifier les programmes
- étendre, sans ajout aux programmes, le champ des savoirs auxquels recourir…